Universidade Federal do ABC
CMCC - Centro de Matemática,
Computação e Cognição

Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada

Estruturas não-Associativas Generalizadas em S^7 e Álgebras de Clifford

Autor: Márcio André Traesel
Orientador: Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr.

Santo André - SP, 7 de dezembro de 2009.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal do ABC

TRAESEL, Márcio André

Estruturas não-Associativas generalizadas em S7 e Álgebras de Clifford / Márcio André Traesel — Santo André : Universidade Federal do ABC, 2009.

113 fls

Orientador: Roldão da Rocha Júnior

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2009.

1. Álgebras 2. Estruturas não-associativas 3. I. ROCHA JÚNIOR, Roldão da. II. Programa de Pós-graduação em Matemática, 2009, III. Título.

CDD 512

Financiamento UFABC, processo 13013808

Estruturas não-Associativas
Generalizadas em S^7
e Álgebras de Clifford

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação de mestrado por **Márcio André Traesel**.

Santo André, 7 de dezembro de 2009.

Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr.
Orientador

Banca Examinadora:
1. Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr.
2. Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.
3. Prof. Dr. Vyacheslav Futorny
4. (Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo)
5. (Profa. Dra. Gisele C. Ducati)

Dissertação a ser apresentada ao CMCC - Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu professor e orientador além de grande amigo Dr. Roldão da Rocha Jr.

Agradeço à banca examinadora pelo carinho e atenção em ler e dar sugestões a este trabalho.

Agradeço à Universidade Federal do ABC pela bolsa auxílio oferecida durante todo o curso.

Agradeço à meus pais Damasio Traesel e Semilda Verônica Schirmann Traesel e à meu irmão Henrique Joel Traesel pelo apoio eterno e incondicional.

Agradeço à turma do mestrado Alexandre Manhe de Oliveira, Ana Paula Pinto de Carvalho, Anna Lígia Oenning Soares, Danilo Peixoto Bellucci, Douglas Azevedo Sant'Anna, Joyce dos Santos Caetano, Michele Cristina Valentino, Pablo Vinicius Almeida Azevedo, Rogério dos Santos Lobo, Simone Tomiko Mata e Wendhel Raffa Coimbra pela amizade.

Agradeço aos amigos e professores em geral, pois seria muito difícil colocá-los numa lista.

Resumo

Ich kann es num einmal nicht lassen, in diesem Drama von Mathematik und Physik - die sich im Dunkeln befruchten aber von Angesicht von Angesicht so gerne einander verkennen und verleugnen - die Rolle des (wie ich genügsam erfuhr, oft unerwünschten) Boten zu spielen.

Hermann Weyl

Eu não posso deixar de assumir, no drama entre a Matemática e a Física - que de noite se fertilizam, e quando estão face a face se degladiam e se atacam - o papel (embora muitas vezes mal-sucedido) de mediador.

Definimos a álgebra tensorial e a álgebra exterior, que equipamos com uma métrica estendida para obter a álgebra de Grassmann. Ainda no contexto da álgebra exterior introduzimos os anti-automorfismos (reversão e conjugação) e o automorfismo (involução graduada) conhecidos. Apresentamos o isomorfismo de Hodge e construímos explicitamente a álgebra exterior como quociente da álgebra tensorial além de definirmos a álgebra de Clifford de três maneiras diferentes porém equivalentes: pelo par formado por uma álgebra associativa e a chamada aplicação de Clifford, pelo quociente da álgebra tensorial por um ideal específico e pelas relações entre os operadores de criação e aniquilação. Dentro de um contexto mais amplo, apresentamos o Teorema de Periodicidade[1] e também sua extensão no ensejo de construir explicitamente a tabela de classificação para as álgebras de Clifford. Fazemos considerações a respeito dos elementos inversos na álgebra de Clifford. Numa segunda abordagem nos utilizamos do formalismo dos octonions dentro da álgebra de Clifford. Definimos o produto-X para X octonion à luz de [Dix94a] e [RV06a] e mostramos uma relação com a fibração de Hopf $S^3 \cdots S^7 \to S^4$. Definimos o produto-XY e o produto-$\bullet$ para X, Y octonions e u multivetor de Clifford, esse último generaliza o produto-X para multivetores, e a partir disso podemos efetuar produtos não-associativos entre octonions, entre octonions e multivetores através do produto-$\bullet$ e entre multivetores de Clifford somente pelo produto-$\odot$. Vale a pena ressaltar que fizemos o produto-$\bullet$ com ações à esquerda. Além disso, até o momento não há nenhum resultado concreto para o produto de ações à direita. O Capítulo 4 tem caráter original no sentido de que a partir do Corolário 1 os resultados que obtemos são inéditos no contexto dos produtos $\bullet$ e $\odot$. Generalizamos os cálculos feitos no fibrado tangente para o fibrado exterior e de Clifford [Dix94a, Ced93, Beg88, Roo84], e o resultado a ser obtido é que algumas estruturas algébricas não-associativas junto ao fibrado exterior sobre S^7 não são perceptíveis do ponto de vista do fibrado tangente. Assim, o Teorema 19 nos proporciona uma visão da natureza algébrica rica oculta no fibrado tangente mas que se revela no fibrado exterior e de Clifford sobre S^7. E suas generalizações são promissoras no sentido de que podemos obter novas identidades considerando a estrutura não-associativa também estendida aos fibrados exterior e de Clifford.

[1] Versão algébrica do Teorema de Atiyah-Bott-Shapiro

Abstract

Tensor and the exterior algebra are defined, which endowed with an extended metric derives the Grassmann algebra. We introduce the anti-automorphisms (reversion and conjugation) and the automorphism (graded involution) in $\Lambda(V)$. We present the Hodge isomorphism and construct explicitly the exterior algebra as the quotient of the tensor algebra by an specific ideal, and also the Clifford algebra is introduced, using three equivalent difinitions: a) the pair formed by an associative algebra and the so called Clifford application; b) by the quotient of the tensor algebra by an specific ideal; c) using the relations between creation and annihilation operators. We present the Periodicity Theorem and also its extension to explicitly obtain the classification table for the Clifford algebras. We define the X-product for $X \in \mathbb{O}$ in the light of [Dix94a] and [RV06a] and show a relation to the Hopf map $S^3 \cdots S^7 \to S^4$. We define the XY-product and the $\bullet$-product for $X, Y \in \mathbb{O}$ and $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$, which generalizes the X-product for multivectors, and from this we can perform non-associative products between octonions, between octonions and multivectors through the $\bullet$-product and between Clifford multivectors solely by the $\odot$-product. We emphasize that the $\bullet$-product is made with left actions. Besides, up to our knowledge it does not exist any result for the product for the right actions. The Chapter 4 has unique feature in the sense that from Corollary 1 the results we get are new in the context of the $\bullet$ and $\odot$ products. We generalize the calculations from the tangent bundle for the whole exterior and Clifford bundle, and the results obtained are that any non-associative algebraic structure in the exterior bundle over S^7 is not probed from the tangent bundle view. Thus, Theorem 19 provides an overview of the rich algebraic nature hidden on the tangent bundle that appears in the exterior and Clifford bundle over S^7.

Sumário

Introdução

Esta dissertação tem por objetivo fornecer uma investigação compreensível em relação à classe mais geral de estruturas não-associativas sobre S^7, para a generalização de produtos octonionicos dentro do contexto das álgebras de Clifford. Como o produto octonionico pode ser definido a partir da estrutura da álgebra de Clifford, esse formalismo está intimamente relacionado com estruturas algébricas e geométricas associadas à esfera S^7 [Bot58]. A generalização das álgebras octonionicas e a não validade das identidades de Moufang podem ser efetuadas neste formalismo, acrescentando-se possíveis generalizações e propriedades adicionais.

Para investigar até onde os conhecidos resultados, em relação as deformações do produto octonionico no fibrado tangente a S^7, podem ser completamente generalizados para todo fibrado exterior e de Clifford sobre S^7, primeiramente, os produtos não-associativos deformados originais entre octonions são revisados, juntamente com o produto octonionico estendido entre octonions e multivetores de Clifford, e também a generalização estendida dos produtos não-associativos entre multivetores de Clifford, à luz de [RV06a, Dix94a]. Nossos resultados são imediatamente levados ao formalismo de [Sch95, Dix94a] no caso particular onde a componente paravetorial de um multivetor arbitrário em $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ é considerada.

Os resultados em [RV06a] são generalizados e desta maneira mais possibilidades são consideradas, quando os assim chamados produtos não-associativos direcionais são considerados explicitamente à luz do formalismo precedente [RV06a].

Aqui tentamos obter a natureza das estruturas não-associativas que podem ser definidas no fibrado exterior e de Clifford sobre S^7, e é verificado que todos resultados adicionais não esperados em relação à estrutura não-associativa no fibrado de Clifford sobre S^7 não podem ser sondados somente quando a estrutura subjacente do fibrado tangente sobre S^7 é considerada, como os resultados em [Ced95, Beg88, Dix94a, Roo84]. O formalismo aqui apresentado e estudado sonda propriedades adicionais que não são percebidas somente no fibrado tangente sobre S^7.

É claro que, ao refazermos os resultados já conhecidos sobre a deformação no formalismo sobre o fibrado tangente sobre S^7 obtemos novamente os mesmos valores ao considerarmos o caso particular onde o subespaço paravetorial $\Lambda^0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda^1(\mathbb{R}^{0,7}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ associado ao produto octonionico padrão, no lugar do espaço subjacente mais geral da álgebra de Clifford construída sobre o espaço tangente em um ponto arbitrário $X \in S^7$.

Com relação ao produto-X e sua representação matricial na Seção 3.4, foi mostrado [Dix94a, Roo84] que o produto-X introduz a fibração de Hopf $S^3 \cdots S^7 \to S^4$ e podemos também, buscar por uma extensão correspondente entre os produtos $\mathbf{e}_a \circ_u \mathbf{e}_b$ — onde $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b$ denotam unidades octonionicas — e alguma estrutura geométrica generalizada que pode ser levada a fibração de Hopf $S^3 \cdots S^7 \to S^4$ no caso particular quando $u \in \Lambda^0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda^1(\mathbb{R}^{0,7}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$. Nesse caso o produto $\mathbf{e}_a \circ_u \mathbf{e}_b$ é feito identicamente ao produto-X entre $\mathbf{e}_a$ e $\mathbf{e}_b$.

Podemos nos perguntar ainda quais propriedades são verificadas quando consideramos o fibrado exterior e de Clifford ao invés do fibrado tangente sobre S^7. O formalismo apresentado em [Ced95, Ced93, Dix94a] mostra que o produto octonionico pode ser deformado de maneira a incluir a torção paralelizável sobre

S^7 [Wit84, Roo84]. O produto-X como apresentado é exatamante duas vezes as componentes da torção, e provamos que, considerando o espaço vetorial subjacente $\Lambda^0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda^1(\mathbb{R}^{0,7})$ associado à álgebra dos octonions, é possível considerar toda álgebra de Clifford em um ponto arbitrário sobre S^7 com o espaço vetorial subjacente associado a $\mathcal{C}\ell_{0,7}$. Possíveis ramificações desse formalismo dentro de suas aplicações podem fornecer modelos que estendem resultados já conhecidos, e.g., [RV06a, Dix94a, Ced95].

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: o Capítulo 1 faz uma abordagem de caráter introdutório da álgebra exterior e suas principais operações e álgebra de Grassmann a partir da álgebra exterior, definimos formalmente uma álgebra de Clifford de três maneiras diferentes e equivalentes e apresentamos os resultados que falam a respeito das condições para uma álgebra de Clifford ser universal. No Capítulo 2 refazemos os resultados já conhecidos sobre a estrutura das álgebras de Clifford, bem como o Teorema de Periodicidade, que são pré-requisitos para obter-se a classificação das álgebras de Clifford reais e complexas. Por fim dessa parte introdutória, discutimos um pouco sobre a existência do elemento inverso em uma álgebra de Clifford. A Seção 3.1 do Capítulo 3 revisa algumas ferramentas matemáticas e técnicas relacionadas à álgebra dos octonions dentro da arena da álgebra de Clifford, e a Seção 3.2 se concentra nas propriedades fundamentais já introduzidas em [RV06a], além disso propriedades adicionais são fornecidas nesses tópicos. As novas definições escondem uma riqueza de resultados não esperados e uma diferença sutil aparece na generalização do produto-u e o produto-u direcional. Esses produtos são introduzidos com o propósito de se obter estruturas não-associativas generalizadas sobre S^7. Novas classes de produtos não-associativos são introduzidos no fibrado de Clifford sobre S^7, juntamente com os produtos não-associativos direcionais e novos contra-exemplos para as identidades de Moufang, que não são satisfeitas de maneira trivial em nosso formalismo. Já na Seção 3.3, seguindo [Roo84], o produto escalar entre octonions é definido, mas agora também campos de multivetores dos fibrados exterior e de Clifford sobre S^7 podem ser levados para octonions em nosso formalismo. Por completeza, na Seção 3.4 a representação matricial introduzida em [Dix94a] é estendida em relação ao produto-u definido em [RV06a]. E finalmente, no Capítulo 4, seguindo [Dix94a] propomos vários resultados, inéditos a partir do Corolário 1, onde buscamos generalizar resultados até então efetuados somente por elementos do fibrado tangente para um amplo horizonte com o fibrado exterior e de Clifford. Apresentamos três Lemas que introduzem involuções octonionicas por um multivetor $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ e na sequência, pelo Teorema 19, apresentamos uma generalização para o formalismo apresentado em [Dix94a]. Esse desenvolvimento pode solucionar problemas em aberto, e.g., [Ced93, Ced95]. No Apêndice A a construção do fibrado tangente sobre S^7 é considerada, e nos Apêndices B-F as respectivas demonstrações dos Lemas 6, 10-13 são fornecidas.

1

Álgebras de Clifford

Iniciaremos este trabalho com um capítulo introdutório a fim de colocarmos várias definições utilizadas ao longo do texto, para isso falaremos de espaços quadráticos, produto tensorial, produto exterior além de definirmos álgebra exterior [Elo05b, Vaz05] e álgebra de Grassmann. Para encerrar o primeiro capítulo, apresentaremos três maneiras diferentes de se definir uma álgebra de Clifford [Ben87, Sny97, Hal74], de modo que as definições sejam equivalentes e possuam sua importância e característica particular. Por conveniência, gostaríamos de registrar também que faremos o uso do acrônimo AC(s) para representar álgebra(s) de Clifford.

1.1 Algumas Definições Úteis

Considere um espaço vetorial V de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Tome uma base $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de V. Dessa maneira podemos escrever um elemento $\mathbf{v}$ de V como $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$, onde está implícita a *convenção da somatória de Einstein*[1].

Vamos considerar agora uma aplicação $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$. Essa aplicação recebe o nome de funcional linear (também denominado *covetor*) se for um homomorfismo entre espaços vetoriais. Agora, definindo a soma de covetores através de $(\alpha+\beta)(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V$ e a multiplicação por escalar através de $(a\alpha)(\mathbf{v}) = a(\alpha(\mathbf{v})), \forall \mathbf{v} \in V,\ a \in \mathbb{K}$, o espaço dos covetores recebe uma estrutura de espaço vetorial e se torna *espaço dual* de V e denota-se por V^*.

Defina os covetores $\mathbf{e}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ como

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Segue que os covetores $\mathbf{e}^i$ formam uma base para V^*. As coordenadas de um covetor arbitrário α nessa base são dadas pelo valor de α na base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V. De fato, dado $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$, $\alpha(\mathbf{v}) = \alpha(v^i\mathbf{e}_i) = v^i\alpha(\mathbf{e}_i) = v^i\alpha_i$. A base $\mathfrak{B}^* = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ é dita base dual da base $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, de onde vemos que $\dim V^* = \dim V$. De agora em diante usaremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e em uma próxima seção eventualmente $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Definimos uma aplicação linear, denominada *correlação* $\tau\colon V \to V^*$, que define naturalmente um funcional bilinear $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ através de

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tau(\mathbf{v})(\mathbf{u}).$$

[1] A notação de Einstein é uma convenção introduzida por Albert Einstein em 1916 para simplificar a escrita de somatórios. Consiste em omitir o símbolo de somatório quando índices superiores e inferiores aparecem repetidos no mesmo termo e interpretar estes índices como indicador desse somatório.

Se $\ker g = \{0\}$, i.e., $\ker g(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \{\mathbf{u} \in V \mid g(\mathbf{v},\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V\}$, a correlação é dita *não-degenerada*. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, se $\ker g = \{0\}$ então τ é um isomorfismo entre V e V^*.

1.1.1 Espaços Quadráticos e Espaços Simpléticos

Um funcional bilinear $g : V \times V \to \mathbb{K}$ é *simétrico* se $g(\mathbf{v},\mathbf{u}) = g(\mathbf{u},\mathbf{v})$ e a correlação[2] τ — associada a g — neste caso satisfaz $\tau(\mathbf{v})(\mathbf{u}) = \tau(\mathbf{u})(\mathbf{v})$. Um espaço vetorial munido de um funcional bilinear simétrico é dito *espaço quadrático*, onde este funcional bilinear simétrico é completamente determinado pela forma quadrática $Q(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v},\mathbf{v})$ através da polarização. De fato, usando a bilinearidade de g, podemos escrever $Q(\mathbf{v}+\mathbf{u}) = g(\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{u})$ como $g(\mathbf{v},\mathbf{u}) = 1/2(Q(\mathbf{v}+\mathbf{u}) - Q(\mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}))$.

Um funcional bilinear σ é *anti-simétrico* ou *alternado* se

$$\sigma(\mathbf{v},\mathbf{u}) = -\sigma(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

e a correlação satisfaz $\tau(\mathbf{v})(\mathbf{u}) = -\tau(\mathbf{u})(\mathbf{v})$. Um espaço vetorial equipado com um funcional linear anti-simétrico é dito um *espaço simplético*.

1.1.2 Produto Tensorial

O produto tensorial entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V e W é um espaço T munido de um mapa bilinear

$$\begin{aligned} \otimes \colon V \times W &\to T \\ (\mathbf{v},\mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v}\otimes\mathbf{w} \end{aligned}$$

que satisfaz a seguinte condição: se $\{\mathbf{e}_i \mid i \in I\}$ e $\{\mathbf{f}_j \mid j \in J\}$, são bases de V e W respectivamente, onde I, J denotam conjuntos de índices, então $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \mid i \in I, j \in J\}$ é base de T.

O produto tensorial é único a menos de isomorfismo, no sentido de que se $(T_1, \otimes_1)$ e $(T_2, \otimes_2)$ são dois produtos tensoriais entre V e W, então existe um isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi \colon T_1 &\to T_2 \\ \mathbf{v}\otimes_1\mathbf{w} &\mapsto \mathbf{v}\otimes_2\mathbf{w} \end{aligned}$$

para quaisquer $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$. Com efeito, para vetores da base de V e W, o isomorfismo pode ser explicitamente construído como $\psi(\mathbf{e}_i \otimes_1 \mathbf{f}_j) = \mathbf{e}_i \otimes_2 \mathbf{f}_j$. Em particular, $\dim(V \otimes W) = \dim V.\dim W$.

Dados $\alpha \in V^*, \beta \in W^*$, definimos agora o produto tensorial $\alpha\otimes\beta$ em $V^* \times W^*$ por

$$(\alpha\otimes\beta)(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{w}), \quad \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$$

assim obtemos o mapa bilinear $\otimes \colon V^* \times W^* \to \mathrm{Hom}(V, W; \mathbb{K})$.

Aqui $(\mathbf{e}^i, \mathbf{f}^j)(\mathbf{v},\mathbf{u}) = v^i u^j$ onde $(v^1, \ldots, v^n)$ e $(u^1, \ldots, u^n)$ são componentes dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ respectivamente. Temos que toda função bilinear $B \colon V \otimes W \to \mathbb{K}$ decompõe-se unicamente como $B(\mathbf{v},\mathbf{u}) = B_{ij}v^i u^j$, as funções $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$ formam uma base de $\mathrm{Hom}(V, W; \mathbb{K})$. Assim

$$\mathrm{Hom}(V, W; \mathbb{K}) \simeq V^* \otimes W^*. \tag{1.1}$$

Em particular, podemos efetuar o produto tensorial entre cópias do mesmo espaço vetorial V. Um covetor age sobre um vetor e resulta num escalar, desse modo, dados $\alpha, \beta \in V^*$ e $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$, $\alpha(\mathbf{v})$ e $\beta(\mathbf{u})$ são escalares e podemos considerar o produto dessas quantidades como $(\alpha\otimes\beta)(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u})$, um funcional

[2]Para as correlações simétricas $\tau \colon V \to V^*$ e $\tau^{-1} \colon V^* \to V$ iremos usar outra notação. Donde as correlações serão denotadas por $\flat \colon V \to V^*$, $\sharp \colon V^* \to V$ de modo que $\flat = \sharp^{-1}$, $\sharp = \flat^{-1}$. Esses isomorfismos são chamados isomorfismos musicais.

linear agindo sobre o produto cartesiano $V \times V$. A quantidade $\alpha \otimes \beta$ é denominada de *produto tensorial* de α e β. Uma consequência da definição é que o produto tensorial é não-comutativo, isto é, $\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha$.

Temos o produto tensorial entre vetores, neste caso o produto age sobre $V^* \times V^*$ resultando em um escalar[3]

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})(\alpha, \beta) = \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}).$$

$T^2(V) = V^* \otimes V^*$ é um espaço vetorial assim como $T_2(V) = V \otimes V$.

Seja $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_i\}$ base de V e $\mathfrak{B}^* = \{\mathbf{e}^i\}$ base dual de V. Sabemos que $\alpha(\mathbf{v}) = \alpha_i v^i$ e $\beta(\mathbf{u}) = \beta_i u^i$, onde $\alpha_i = \alpha(\mathbf{e}_i)$, $\beta_i = \beta(\mathbf{e}_i)$, $v^i = \mathbf{e}^i(\mathbf{v})$ e $u^i = \mathbf{e}^i(\mathbf{u})$. Desse modo $(\alpha \otimes \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \alpha_i \beta_j v^i u^j$ e por outro lado $(\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = v^k u^l$. Portanto podemos escrever $(\alpha \otimes \beta) = \alpha_i \beta_j \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l$.

Os funcionais bilineares $\{\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l\}$, com $1 \leq k, l \leq n$, formam uma base para o espaço $T^2(V)$. Se B é um funcional bilinear então podemos escrever $B = b_{kl}\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l$ onde b_{kl} são as componentes das coordenadas de B nessa base.

Dado $B \in T^2(V)$, definimos funcionais bilineares simétricos a alternados respectivamente por

$$B_{\text{sim}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{2} \quad \text{e} \quad B_{\text{alt}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - B(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{2}.$$

Dessa forma, um funcional bilinear arbitrário B pode ser escrito como $B = B_{\text{sim}} + B_{\text{alt}}$.

► **Proposição 1:** *Dada uma aplicação linear $\phi\colon V \times W \to U$, existe uma única aplicação linear $\psi\colon V \otimes W \to U$ tal que*

$$\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \psi(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}), \quad \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W.$$

◄

Demonstração: Na base de $V \otimes W$, tal mapa linear é dado por $\phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = \psi(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j)$.□

Na verdade provamos o caráter universal do produto tensorial, ao provar que existe uma função $f\colon V \times W \to V \otimes W$ tal que $\psi \circ f = \phi$, como mostra o diagrama comutativo a seguir

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & U \\ & V \otimes W \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Portanto existe um isomorfismo entre $\mathrm{Hom}(V \otimes W; U)$ e $\mathrm{Hom}(V, W; U)$ que leva $\psi\colon V \otimes W \to U$ a $\phi\colon V \times W \to U$, em particular quando $U = \mathbb{K}$ temos que $(V \otimes W)^* \simeq \mathrm{Hom}(V, W; \mathbb{K})$, uma vez que $(V \otimes W)^*$ leva o espaço vetorial ao corpo $\mathbb{K}$.

Pelo isomorfismo obtido na Eq.(1.1), acabamos de mostrar o seguinte isomorfismo:

$$(V \otimes W)^* \simeq V^* \otimes W^*$$

O isomorfismo acima é visto como uma extensão da correlação $\tau\colon V \to V^*$, que dualiza também o produto tensorial

$$\begin{aligned} \tau\colon V \otimes W &\to (V \otimes W)^* \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} &\mapsto \tau(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \tau(\mathbf{v}) \otimes \tau(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

[3]Aqui estamos considerando o bidual, pois temos o isomorfismo canônico entre V e V^{**}.

De agora em diante adotaremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a menos que especificado o contrário. Dados $\alpha_i \in V^*, v_i \in V$ podemos definir um tensor do tipo $(p, 0)$ como

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu_1} \otimes \alpha_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\nu_p} \colon V \times V \times \cdots \times V &\to \mathbb{R} \\ (\alpha_{\nu_1} \otimes \alpha_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\nu_p})(\mathbf{v}_{\mu_1}, \mathbf{v}_{\mu_2}, \ldots, \mathbf{v}_{\mu_p}) &\mapsto \alpha_{\nu_1}(\mathbf{v}_{\mu_1})\alpha_{\nu_2}(\mathbf{v}_{\mu_2}) \ldots \alpha_{\nu_p}(\mathbf{v}_{\mu_p}). \end{aligned}$$

O espaço definido pelo produto tensorial de vetores é também um espaço vetorial, denotado por $T_p(V) = (V)^{\otimes p}$, onde $(V)^{\otimes p}$ denota o produto de p-termos do tipo $V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$.

Outra maneira é definirmos um tensor do tipo $(0, q)$ por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mu_1} \otimes \mathbf{v}_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{\mu_q} \colon V^* \times V^* \times \cdots \times V^* &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_{\mu_1} \otimes \mathbf{v}_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{\mu_q})(\alpha_{\nu_1}, \alpha_{\nu_2}, \ldots, \alpha_{\nu_q}) &\mapsto \alpha_{\nu_1}(\mathbf{v}_{\mu_1})\alpha_{\nu_2}(\mathbf{v}_{\mu_2}) \ldots \alpha_{\nu_q}(\mathbf{v}_{\mu_q}). \end{aligned}$$

De onde temos o espaço vetorial definido pelo produto tensorial de covetores, denotado por $T^q(V) = (V^*)^{\otimes q}$, com $(V^*)^{\otimes q}$ denotando o produto de q-termos $V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$.

Podemos ainda generalizar mais, para o produto tensorial de um número arbitrário de vetores e covetores, assim o espaço em questão é ${T_p}^q(V) = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$. Um elemento arbitrário $T \in {T_p}^q(V)$ pode ser escrito na forma $T^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \mathbf{e}_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mu_p} \otimes \mathbf{e}^{\nu_1} \otimes \mathbf{e}^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\nu_q}$ onde $T^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} = T\left(\mathbf{e}_{\mu_1}, \mathbf{e}_{\mu_2}, \ldots, \mathbf{e}_{\mu_p}, \mathbf{e}^{\nu_1}, \mathbf{e}^{\nu_2}, \ldots, \mathbf{e}^{\nu_q}\right)$.

Dada uma permutação σ, definimos o operador Alt, denominado *alternador*, como sendo o operador tal que

$$\mathrm{Alt}\left(X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} \otimes X_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes X_{\sigma(p)}$$

onde S_p é o grupo simétrico formado pelo conjunto de todas as permutações e $\epsilon(\sigma) = +1$ se a permutação for *par* e $\epsilon(\sigma) = -1$ se a permutação for *ímpar*. O operador Alt é um operador de projeção [Vaz05] uma vez que $\mathrm{Alt}^2 = \mathrm{Alt}$.

Outra maneira de escrever a ação do alternador é por meio de funcionais multilineares agindo em vetores. Considerando um tensor covariante da forma $\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$, temos

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_p)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p) = \alpha_1(\mathbf{v}_1)\alpha_2(\mathbf{v}_2) \ldots \alpha_p(\mathbf{v}_p).$$

Com isto definimos a ação do operador Alt sobre um tensor contravariante

$$(\mathrm{Alt}(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_p))(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p) = \frac{1}{p!} \begin{vmatrix} \alpha_1(\mathbf{v}_1) & \alpha_1(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha_1(\mathbf{v}_p) \\ \alpha_2(\mathbf{v}_1) & \alpha_2(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha_2(\mathbf{v}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_p(\mathbf{v}_1) & \alpha_p(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha_p(\mathbf{v}_p) \end{vmatrix}.$$

1.1.3 Produto Exterior

Sejam $\alpha, \beta \in V^*$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, o produto exterior é definido como

$$(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha(\mathbf{v}) & \alpha(\mathbf{u}) \\ \beta(\mathbf{v}) & \beta(\mathbf{u}) \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante, temos

$$(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}) - \alpha(\mathbf{u})\beta(\mathbf{v})) = \frac{1}{2}\left[(\alpha \otimes \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - (\beta \otimes \alpha)(\mathbf{v}, \mathbf{u})\right].$$

Como a expressão é válida para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, concluímos que

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha) = -\beta \wedge \alpha.$$

O produto exterior é associativo e bilinear além de anticomutativo, como visto acima. Nota-se que $\alpha \wedge \alpha = 0$. O conjunto desses funcionais bilineares alternados é um subespaço de $T^2(V)$, denotado por $\Lambda^2(V)$. É comum denotarmos $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ e $\Lambda^1(V) = V^*$. Um 2-covetor é dito *simples* se ele puder ser escrito na forma $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, onde α_1 e α_2 são covetores.

► **Obs.1:** Em geral um q-covetor será dito um q-covetor *simples* se ele puder ser escrito como o produto exterior de q 1-covetores, tal como a equação a seguir:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_q.$$

Não é difícil mostrarmos que para todo espaço vetorial V^* tal que $n = \dim V^* \leq 3$ todo q-covetor é simples. Para $\dim V^* \geq 4$ nem todo q-covetor é simples. Por exemplo, seja V^* um espaço vetorial de dimensão 4 e $\mathfrak{B}^* = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4\}$ uma base de V^*. Seja $\psi_2 = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4$. Não existe nenhuma combinação linear dos vetores $\{\mathbf{e}^i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ que permita escrever ψ_2 na forma $\psi_2 = \alpha_1 \wedge \alpha_2$. ◄

A generalização da definição acima para um elemento de $\Lambda^k(V)$ é dada por

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} \alpha_1(\mathbf{v}_1) & \alpha_1(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha_1(\mathbf{v}_k) \\ \alpha_2(\mathbf{v}_1) & \alpha_2(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha_2(\mathbf{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(\mathbf{v}_1) & \alpha_k(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha_k(\mathbf{v}_k) \end{vmatrix}.$$

O conjunto dos funcionais k-lineares alternados formam um espaço vetorial $\Lambda^k(V)$ e seus elementos são ditos k-covetores. Definimos o produto entre k e m covetores simples por

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \wedge (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_m) = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_m.$$

Note ainda que para $\alpha_k \in \Lambda^k(V)$ e $\beta_m \in \Lambda^m(V)$ temos, $\alpha_k \wedge \beta_m = (-1)^{mk}\beta_m \wedge \alpha_k$.

Uma base para o espaço $\Lambda^k(V)$ é dada por $\mathbf{e}^{\mu_1} \wedge \mathbf{e}^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\mu_k}$ e o número de elementos distintos consiste na combinação de n elementos tomados k a k, dado por $\binom{n}{k}$. Um elemento arbitrário $\psi \in \Lambda^k(V)$ pode ser escrito na forma

$$\psi = \frac{1}{k!}\sum_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} \psi_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}\mathbf{e}^{\mu_1} \wedge \mathbf{e}^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\mu_k} = \sum_{\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_k} \psi_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}\mathbf{e}^{\mu_1} \wedge \mathbf{e}^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\mu_k}.$$

A dimensão de $\Lambda^k(V)$ é dada por

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Portanto $\dim \Lambda^k(V) = \dim \Lambda^{n-k}(V)$.

► **Lema 1:** *O produto exterior de m covetores anula-se sempre que $m > n$, onde $n = \dim V$.* ◄

Demonstração: De fato, considere o produto $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n+1}$. Se $\dim V^* = n$, temos no máximo n covetores linearmente independentes. Sem perda de generalidade, escolha $\alpha_{n+1} = a^i\alpha_i$. Portanto

$$\begin{aligned} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n+1} &= \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge (a^1\alpha_1 + \cdots + a^n\alpha_n) \\ &= (-1)^{n-1}a^1\alpha_1 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n + \cdots + a^n\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1} \wedge \alpha_n \wedge \alpha_n = 0, \end{aligned}$$

pois $\alpha_i \wedge \alpha_i = 0, \forall \alpha_i \in \Lambda^1(V)$. □

Isto mostra que não existe um espaço $\Lambda^k(V)$ se $k > n$. O espaço vetorial $\Lambda^n(V)$ tem dimensão $\binom{n}{n} = 1$ e os elementos de $\Lambda^n(V)$ são denominados *pseudo-escalares*, enquanto que os k-covetores recebem o nome de *k-formas*.

Quando efetuamos a multiplicação entre 1-forma obtemos 2-formas, com 2-formas obtemos 3-formas, ..., k-formas, entretanto a álgebra $\Lambda^k(V)$ não é fechada em relação ao produto exterior uma vez que para $\psi_k \in \Lambda^k(V)$ e $\psi_m \in \Lambda^m(V)$ temos $\psi_k \wedge \psi_m \in \Lambda^{k+m}(V)$. Uma saída para esse inconveniente é definirmos

$$\Lambda(V) = \Lambda^0(V) \oplus \Lambda^1(V) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(V) = \oplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V),$$

onde definimos *álgebra exterior*[4] do espaço vetorial V.

Um multicovetor arbitrário de $\Lambda(V)$ pode ser escrito como [Vaz05, Roc02, Roc06a] uma soma de um escalar, um covetor, um 2-covetor,..., até um n-covetor

$$\Lambda(V) \ni \underbrace{a}_{\text{escalar}} + \underbrace{\alpha_i \mathbf{e}^i}_{\text{covetor}} + \underbrace{F_{ij}\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j}_{2-\text{covetor}} + \underbrace{T_{ijk}\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}^k}_{3-\text{covetor}} + \cdots + \underbrace{p\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n}_{n-\text{covetor}}$$

e a dimensão de $\Lambda(V) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

1.1.4 Operações Dentro da Álgebra Exterior

Escrevemos abaixo algumas operações bastante utilizadas em álgebra exterior.

Projeção: denotaremos por $\langle\ \rangle_k$ o projetor

$$\begin{array}{rcl} \langle\ \rangle_k : \Lambda(V) & \to & \Lambda^k(V) \\ \psi & \mapsto & \langle\psi\rangle_k = \psi_k \end{array}$$

de modo que $\langle\psi\rangle_k$ é a parte k-covetorial do multicovetor ψ.

Reversão:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{} : \Lambda(V) & \to & \Lambda(V) \\ \psi & \mapsto & \widetilde{\psi_k} = (-1)^{k(k-1)/2}\psi_k \end{array}$$

Involução Graduada:

$$\begin{array}{rcl} \# : \Lambda(V) & \to & \Lambda(V) \\ \psi & \mapsto & \#(\psi_k) = \widehat{\psi_k} = (-1)^k\psi_k \end{array}$$

Conjugação: essa operação é a composição da reversão com a involução graduada, e é definida por

$$\begin{array}{rcl} \bar{} : \Lambda(V) & \to & \Lambda(V) \\ \psi & \mapsto & \overline{\psi_k} = \widehat{\widetilde{\psi_k}} = \widetilde{\widehat{\psi_k}}. \end{array}$$

A involução graduada é um *automorfismo* da álgebra exterior, $\widehat{\psi \wedge \phi} = \hat{\psi} \wedge \hat{\phi}$, enquanto a reversão e a conjugação são *anti-automorfismos*, $\widetilde{\psi \wedge \phi} = \tilde{\phi} \wedge \tilde{\psi}$, $\overline{\psi \wedge \phi} = \bar{\phi} \wedge \bar{\psi}$.

Contração ou produto interior: no início desse capítulo vimos a aplicação linear $\alpha\colon V \to \mathbb{R}$. Dentro do contexto da álgebra exterior, podemos ver o funcional α como uma operação tal que $\Lambda^1(V) = V^* \to$

[4] A partir deste momento, o espaço vetorial subjacente onde estaremos trabalhando estará implícito pela notação dos índices. Com o índice embaixo significa que estamos usando o espaço vetorial V, e com o índice em cima o seu dual V^*.

$\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$. Para generalizar esse conceito, introduziremos a operação denominada *contração à esquerda* pelo vetor $\mathbf{v}$, que age sobre $\psi_k \in \Lambda^k(V)$ e resulta em um elemento de $\Lambda^{k-1}(V)$, como sendo

$$(\mathbf{v}\rfloor\psi_k)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = k\psi_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}).$$

No caso em que $k = 1$, a definição se reduz a $\mathbf{v}\rfloor\alpha = \alpha(\mathbf{v})$. Para $a \in \mathbb{R}$, temos $\mathbf{v}\rfloor a = 0$. A definição acima não é muito boa a efeito de cálculo, vamos então considerar a contração de $\alpha \wedge \beta$ por um vetor $\mathbf{v}$ pela definição e ver o que acontece,

$$\mathbf{v}\rfloor(\alpha \wedge \beta) = 2(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\alpha(\mathbf{v})\beta - \beta(\mathbf{v})\alpha)\mathbf{u} = ((\mathbf{v}\rfloor\alpha)\beta - (\mathbf{v}\rfloor\beta)\alpha)(\mathbf{u}).$$

A generalização dessa equação para a *contração à esquerda* do produto exterior de um p-covetor com um q-covetor é dada pela *regra de Leibniz graduada*

$$\boxed{\mathbf{v}\rfloor(\psi_p \wedge \phi_q) = (\mathbf{v}\rfloor\psi_p) \wedge \phi_q + \hat{\psi}_p \wedge (\mathbf{v}\rfloor\phi_q)}$$

De maneira análoga podemos definir *contração à direita*

$$(\psi_k\lfloor\mathbf{v})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = k\psi_k(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v})$$

e a generalização pela *regra de Leibniz graduada* para a contração à direita fica

$$\boxed{(\psi_p \wedge \phi_q)\lfloor\mathbf{v} = \psi_p \wedge (\phi_q\lfloor\mathbf{v}) + (\psi_p\lfloor\mathbf{v}) \wedge \hat{\phi}_q}$$

Para encontrarmos a relação entre a contração à esquerda e à direita, basta notarmos que

$$\begin{aligned}
\psi_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) &= (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma)\mathbf{v}(\alpha_{\sigma(1)})\mathbf{v}_1(\alpha_{\sigma(2)})\mathbf{v}_2(\alpha_{\sigma(3)})\dots\mathbf{v}_{k-1}(\alpha_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!}\begin{vmatrix}
\mathbf{v}(\alpha_1) & \mathbf{v}(\alpha_2) & \cdots & \mathbf{v}(\alpha_k) \\
\mathbf{v}_1(\alpha_1) & \mathbf{v}_1(\alpha_2) & \cdots & \mathbf{v}_1(\alpha_k) \\
\mathbf{v}_2(\alpha_1) & \mathbf{v}_2(\alpha_2) & \cdots & \mathbf{v}_2(\alpha_k) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{v}_{k-1}(\alpha_1) & \mathbf{v}_{k-1}(\alpha_2) & \cdots & \mathbf{v}_{k-1}(\alpha_k)
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{k-1}\psi_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

o que implica em $\mathbf{v}\rfloor\psi_k = (-1)^{k-1}\psi_k\lfloor\mathbf{v}$. Portando chegamos a relação $\mathbf{v}\rfloor\psi = -\hat{\psi}\lfloor\mathbf{v}$ onde ψ é um multicovetor arbitrário.

Assim como podemos definir a produto exterior de covetores, formando os p-covetores, é natural generalizar as definições de contração à esquerda e à direita para um k-vetor [Vaz05, Roc02]. Dado um k-vetor $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$ definimos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k)\rfloor &= \mathbf{v}_1\rfloor\mathbf{v}_2\rfloor\dots\mathbf{v}_k\rfloor \\
\lfloor(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) &= \lfloor\mathbf{v}_1\lfloor\mathbf{v}_2\dots\lfloor\mathbf{v}_k
\end{aligned}$$

Das definições acima segue imediatamente que a contração de um p-covetor por um q-vetor anula-se quando $q > p$. Ilustramos agora o uso da contração considerando a contração de um 2-vetor por um 2-covetor e em seguida um 3-vetor por um 3-covetor. Leve em conta $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ um 2-vetor, portanto da definição

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta)\rfloor(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) &= \alpha\rfloor\beta\rfloor(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = \alpha\rfloor((\beta\rfloor\mathbf{v})\mathbf{u} - (\beta\rfloor\mathbf{u})\mathbf{v}) \\
&= \beta(\mathbf{v})\alpha(\mathbf{u}) - \beta(\mathbf{u})\alpha(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

e agora considerando $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ um 3-vetor vem

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta \wedge \lambda) \rfloor (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) = \alpha \rfloor \beta \rfloor \lambda \rfloor (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) \\
&= \alpha \rfloor \beta \rfloor \frac{1}{2} (\lambda(\mathbf{v})\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \lambda(\mathbf{u})\mathbf{w} \wedge \mathbf{v} + \lambda(\mathbf{w})\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} - \lambda(\mathbf{w})\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} - \lambda(\mathbf{v})\mathbf{w} \wedge \mathbf{u} - \lambda(\mathbf{u})\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \\
&= \lambda(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u})\alpha(\mathbf{w}) - \lambda(\mathbf{v})\beta(\mathbf{w})\alpha(\mathbf{u}) + \lambda(\mathbf{u})\beta(\mathbf{w})\alpha(\mathbf{v}) - \lambda(\mathbf{u})\beta(\mathbf{v})\alpha(\mathbf{w}) + \lambda(\mathbf{w})\beta(\mathbf{v})\alpha(\mathbf{u}) - \lambda(\mathbf{w})\beta(\mathbf{u})\alpha(\mathbf{v}).
\end{aligned}
$$

Considerando os homomorfismos $f_i \colon V_i \to W_i \quad (i = 1, 2)$ de acordo com [Vin03], existe uma única aplicação linear $f_1 \otimes f_2 \colon V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ tal que

$$(f_1 \otimes f_2)(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = f_1(\mathbf{v}_1) \otimes f_2(\mathbf{v}_2).$$

Para o nosso caso

$$
\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}) - \alpha(\mathbf{u})\beta(\mathbf{v})) = -\frac{1}{2}(\alpha \wedge \beta) \rfloor (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\beta \wedge \alpha) \rfloor (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \\
&= \frac{1}{2}(\widetilde{\alpha \wedge \beta}) \rfloor (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}).
\end{aligned}
$$

Generalizando o resultado para $\Upsilon^p \in \Lambda^p(V)$ e $\Xi_p \in \Lambda_p(V)$, obtemos [Vaz05]

$$\Upsilon^p(\Xi_p) = \frac{1}{p!} \widetilde{\Upsilon^p} \rfloor \Xi_p.$$

1.2 A Álgebra de Grassmann

Primeiramente precisamos definir a extensão do funcional bilinear simétrico não-degenerado $g \colon V \times V \to \mathbb{R}$, que é o mesmo que estender a correlação $\tau \colon V \to V^*$. Definimos essa extensão como uma aplicação $\tau \colon \Lambda_k(V) \to \Lambda^k(V)$ dada por

$$\tau(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) = \tau(\mathbf{v}_1) \wedge \tau(\mathbf{v}_2) \wedge \cdots \wedge \tau(\mathbf{v}_k).$$

Após esse resultado, podemos definir a extensão do funcional bilinear $g \colon V \times V \to \mathbb{R}$, $g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tau(\mathbf{v})(\mathbf{u})$. Denotando por G, a extensão $G \colon \Lambda_k(V) \times \Lambda_k(V) \to \mathbb{R}$ para o caso de k-vetores é dada por

$$G(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k) = k! \tau(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k)(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k) = \tau(\mathbf{v}_k \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_1) \rfloor (\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k)$$

ou ainda

$$G(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k) = \begin{vmatrix} g(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1) & g(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2) & \cdots & g(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_k) \\ g(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1) & g(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2) & \cdots & g(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1) & g(\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_2) & \cdots & g(\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_k) \end{vmatrix}.$$

Dados $A_k \in \Lambda_k(V)$ e $B_m \in \Lambda_m(V)$ com $k \neq m$ definimos

$$G(A_k, B_m) = 0.$$

▶ **Definição 1:** A álgebra exterior $\Lambda(V)$ equipada com a extensão G para todo $\Lambda(V)$ é a *álgebra de Grassmann* do espaço vetorial V, que denotaremos por $\mathcal{G}(V)$.◀

1.2.1 Isomorfismo de Hodge

Vimos que os espaços vetoriais $\Lambda_k(V)$ e $\Lambda_{n-k}(V)$ têm a mesma dimensão e, portanto, são isomorfos. Esse isomorfismo não é canônico e uma maneira de construirmos este isomorfismo é através do *isomorfismo de Hodge*, que está definido dentro do contexto da álgebra de Grassmann pois faz uso de uma correlação em V [Vaz05].

O isomorfismo de Hodge dado pelo operador dual $\star\colon \Lambda_k(V) \to \Lambda_{n-k}(V)$ é definido como

$$A \wedge \star B = G(A, B)\Omega_V$$

$\forall\ A, B \in \Lambda_k(V)$ e Ω_V como sendo um n-vetor *unitário*. De onde temos também

$$\star 1 = \Omega_V, \qquad\qquad \star A = \tilde{A} \rfloor \Omega_V.$$

$\triangleright$ **Exemplo 1:** Vamos calcular o dual de Hodge para os elementos $1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ com $(\mathbf{e}_i)^2 = 1$ para $i = 1, 2, 3$, onde $I = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ é o elemento de volume.

$$\star 1 = I = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \quad \star\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \quad \star\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1, \quad \star\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2,$$
$$\star(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, \quad \star(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \quad \star(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1, \quad \star I = \star(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = 1.$$

$\triangleleft$

1.3 Álgebra Exterior como Quociente da Álgebra Tensorial

Num conjunto X, dados dois elementos $a, b \in X$, dizemos que a é *equivalente* a b (e denota-se por $a \sim b$) se (i) $a \sim a$, (ii) se $a \sim b$ então $b \sim a$, e (iii) se $a \sim b$ e $b \sim c$ então $a \sim c$, $\forall a, b, c \in X$. O conjunto de todos os elementos equivalentes a um elemento a constituem a *classe de equivalência de* a, denotada por $[a] = \{b \in X \mid b \sim a\}$. O conjunto dessas classes de equivalência é denotado por $\mathcal{X} = X/\sim = \{[a] \mid a \in X\}$.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto $I_L \subset \mathcal{A}$ é um *ideal à esquerda* de $\mathcal{A}$ se $\forall a \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in I_L$ temos $ax \in I_L$. Analogamente, $I_R \subset \mathcal{A}$ é um *ideal à direita* de $\mathcal{A}$ se $\forall a \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in I_R$ temos $xa \in I_R$. O conjunto $I \subset \mathcal{A}$ é dito um *ideal bilateral* (ou simplesmente *ideal*) de $\mathcal{A}$ se $\forall a, b \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in I$ temos $axb \in I$.

Suponha que $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$, onde $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não são necessariamente subálgebras de $\mathcal{A}$ e a soma também não precisa ser soma direta. Definimos então a seguinte relação de equivalência em $\mathcal{A}$

$$a \sim b \Longleftrightarrow a = b + x, \quad x \in \mathcal{C}.$$

O conjunto $\mathcal{A}/\sim$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial com as definições

$$[a] + [b] = [a + b]\,, \qquad\qquad \lambda\,[a] = [\lambda a]$$

para $\lambda \in \mathbb{K}$ corpo.

Para que as classes de equivalência sejam uma álgebra, definimos o produto entre as classes de equivalência tal como segue

$$[a]\,[b] = [ab]$$

Para $c, d \in \mathcal{C}$ temos

$$[a]\,[b] = [a + c]\,[b + d] = [ab + ad + cb + cd]$$

ou seja, $ad + cb + cd \in \mathcal{C}$, o que é verdade só se $\mathcal{C}$ for um *ideal*. Nesse caso temos uma álgebra denominada *álgebra quociente de* $\mathcal{A}$ *pelo ideal* $\mathcal{C}$, denotada por $\mathcal{A}/\mathcal{C}$.

Seja I um ideal de $T(V)$ consistindo de todos elementos da forma $\sum_i a_i \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes b_i$ com $\mathbf{v} \in V, a_i, b_i \in T(V)$. Podemos ainda dizer que o ideal I é gerado por $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ com $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$.

Vamos agora mostrar que a álgebra exterior é isomorfa à álgebra quociente $T(V)/I$. A relação de equivalência em questão é

$$a \sim b \Longleftrightarrow a = b + x, \quad x \in I.$$

A classe de equivalência de a é denotada por $[a]$ e o produto é denotado por

$$[a] \wedge [b] = [a \otimes b].$$

Dados $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$, podemos calcular $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ de acordo com a definição acima

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$$

onde $1/2(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \in I$. Com efeito,

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} + \mathbf{u}) - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}.$$

Portanto

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \sim \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}),$$

ou $[\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}] = [\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}]$ e $[\mathbf{v}] \wedge [\mathbf{u}] = [\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}]$.

O resultado acima pode ser generalizado como

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_k \sim \mathrm{Alt}(\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k,$$

mostrando portanto que

$$\Lambda(V) \simeq T(V)/I. \tag{1.2}$$

1.4 Álgebra de Clifford (1)

Seja V um espaço vetorial[5] sobre $\mathbb{R}$ equipado com um funcional bilinear simétrico não-degenerado g. Seja $\mathcal{A}$ uma *álgebra associativa com unidade* $1_\mathcal{A}$ e seja $\gamma \colon V \to \mathcal{A}$ uma aplicação.

▶ **Definição 2:** O par $(\mathcal{A}, \gamma)$ é uma *álgebra de Clifford* para o espaço quadrático (V, g) quando $\mathcal{A}$ é gerada como álgebra por $\{\gamma(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V)\}$ e $\{a1_\mathcal{A} \mid a \in \mathbb{R}\}$ e γ satisfaz

$$\boxed{\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})1_\mathcal{A}}$$

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$.◀

A aplicação γ funciona como uma espécie de raiz quadrada da forma quadrática $Q(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ uma vez que

$$\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{v}) + \gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{v})1_\mathcal{A} \Rightarrow (\gamma(\mathbf{v}))^2 = g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = Q(\mathbf{v}).$$

Essa aplicação γ é dita uma aplicação de Clifford [Vaz05, Roc06a].

Considere uma base ortonormal $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de V. Dentro da álgebra de Clifford $(\mathcal{A}, \gamma)$ para (V, g) temos $\gamma(\mathbf{e}_i)\gamma(\mathbf{e}_j) + \gamma(\mathbf{e}_j)\gamma(\mathbf{e}_i) = 0, \quad i \neq j, \quad$ e $\quad \gamma(\mathbf{e}_i)^2 = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)1_\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ é gerada por $\{\gamma(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V)\}$ e $\{a1_\mathcal{A} \mid a \in \mathbb{R}\}$ então ela é gerada pelos produtos

$$\mathcal{A} = \mathrm{span}\left\{\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2} \ldots \gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n} \mid \mu_i = 0, 1\right\},$$

onde $\gamma(\mathbf{e}_1)^0\gamma(\mathbf{e}_2)^0 \ldots \gamma(\mathbf{e}_n)^0 = 1_\mathcal{A}$. O número de elementos da forma $\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2} \ldots \gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}$ com $\mu_i = 0, 1$ é 2^n. Assim a dimensão máxima de uma AC[6] é 2^n.

[5] Podemos na realidade utilizar o espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ desde que $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

[6] Lembramos que AC é a forma abreviada para álgebra de Clifford, como proposto no início do texto.

▶ **Definição 3:** Uma álgebra de Clifford $(\mathcal{A},\gamma)$ para o espaço quadrático (V,g) é dita uma *álgebra de Clifford universal* se para cada álgebra de Clifford $(\mathcal{B},\rho)$ para (V,g) existir um homomorfismo $\phi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ tal que $\rho=\phi\circ\gamma$ e $\phi(1_{\mathcal{A}})=1_{\mathcal{B}}$. Denotaremos uma AC universal para (V,g) por $\mathcal{C}\ell(V,g)$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A},\gamma) \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[dl, "\rho=\phi\circ\gamma"] \\
(\mathcal{B},\rho) &
\end{tikzcd}$$

◀

Daremos a seguir um contra-exemplo de uma álgebra de Clifford que não é universal.

▷ **Exemplo 2:** Seja W o subespaço vetorial de $\Lambda(\mathbb{R}^{5,0})$ dado por $W=\Lambda_0(\mathbb{R}^{5,0})\oplus\Lambda_1(\mathbb{R}^{5,0})\oplus\Lambda_2(\mathbb{R}^{5,0})$, cuja dimensão é $1+5+5(5-1)/2=2^5/2=2^4$. Dados $a,b\in W$ defina um produto $*$ em W através de

$$\begin{aligned} a*b &= \langle ab(1+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5)\rangle_{0\oplus1\oplus2} \\ &= \langle ab(1+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5)\rangle_0+\langle ab(1+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5)\rangle_1+\langle ab(1+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5)\rangle_2\,, \end{aligned}$$

onde $\{\mathbf{e}_i\}$ $(i=1,2,3,4,5)$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{5,0}$ e ab é o produto usual da álgebra de Clifford. Note que, $\mathbf{e}_1*\mathbf{e}_2*\mathbf{e}_3*\mathbf{e}_4*\mathbf{e}_5=1$, e daí a álgebra de Clifford dada não é universal pois o elemento de volume, o pseudo-escalar, é múltiplo da identidade e portanto a dimensão dessa álgebra é 2^{n-1} [Vaz05]. ◁

▶ **Teorema 1:** *A álgebra de Clifford* $(\mathcal{A},\gamma)$ *para o espaço quadrático* (V,g) *é universal quando* $\dim\mathcal{A}=2^n$, *onde* $n=\dim V$. ◀

Demonstração: Considere uma base ortonormal $\mathfrak{B}=\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ de V. Para a AC $(\mathcal{A},\gamma)$ temos $\gamma(\mathbf{e}_i)\gamma(\mathbf{e}_j)+\gamma(\mathbf{e}_j)\gamma(\mathbf{e}_i)=0$ para $i\neq j$ e $\gamma(\mathbf{e}_i)^2=g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)1_{\mathcal{A}}$. Nesse caso, o conjunto

$$\{\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}\mid \mu_i=0,1\}$$

não apenas gera $\mathcal{A}$, mas também é base de $\mathcal{A}$, com a hipótese de que $\dim\mathcal{A}=2^n$. Seja agora $(\mathcal{B},\rho)$ uma AC arbitrária. Temos então $\rho(\mathbf{e}_i)\rho(\mathbf{e}_j)+\rho(\mathbf{e}_j)\rho(\mathbf{e}_i)=0$, para $i\neq j$ e $\rho(\mathbf{e}_i)^2=g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)1_{\mathcal{A}}$ e o conjunto $\{\rho(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\rho(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\rho(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}\mid\mu_i=0,1\}$ gera $\mathcal{B}$. Definimos agora uma aplicação $\phi\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ tal que

$$\phi(\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n})=\rho(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\rho(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\rho(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}.$$

Vemos que ϕ assim definido é um homomorfismo de álgebras, satisfazendo $\phi(\mathbf{e}_i)\phi(\mathbf{e}_j)+\phi(\mathbf{e}_j)\phi(\mathbf{e}_i)=2g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)1_{\mathcal{B}}$. Pela definição, a AC $(\mathcal{A},\gamma)$ é portanto uma AC universal $\mathcal{C}\ell(V,g)$. □

Seja g uma forma bilinear simétrica em $\mathbb{R}^n$ de assinatura (p,q), onde $p+q=n$, de modo que se $\mathfrak{B}=\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ é uma base ortonormal, para $\mathbf{v}=v^i\mathbf{e}_i$ temos:

$$g(\mathbf{v},\mathbf{v})=(v^1)^2+\dots+(v^p)^2-(v^{p+1})^2-\dots-(v^{p+q})^2.$$

Denotaremos esse espaço quadrático por $\mathbb{R}^{p,q}$ e a álgebra de Clifford correspondente por $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, onde $\mathcal{C}\ell_{p,q}=\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$.

▶ **Lema 2:** *Definimos o centro de* $\mathcal{C}\ell_{p,q}$*, a AC associada ao espaço quadrático* $\mathbb{R}^{p,q}$*, como*

$$Z(\mathcal{C}\ell_{p,q})=\{\psi\in\mathcal{C}\ell_{p,q}\mid\psi\phi=\phi\psi,\quad\forall\phi\in\mathcal{C}\ell_{p,q}\}\,.$$

Se $n=\dim\mathbb{R}^{p,q}$ *for par então* $Z(\mathcal{C}\ell_{p,q})=\Lambda_0(\mathbb{R}^{p,q})$*, e se for ímpar temos* $Z(\mathcal{C}\ell_{p,q})=\Lambda_0(\mathbb{R}^{p,q})\oplus\Lambda_n(\mathbb{R}^{p,q})$.

◀

Demonstração: Só é necessário demonstrar para os elementos $\psi \in Z(\mathcal{C}\ell_{p,q})$ tais que

$$\psi\phi = \phi\psi \Rightarrow \psi^i \mathbf{e}_i \phi = \phi\psi^i \mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{e}_i\phi = \phi\mathbf{e}_i$$

pois tais elementos geram toda AC. Deste modo basta verificar a comutação dos multivetores de $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ com os vetores $\{\mathbf{e}_i\}$ da base ortonormal

$$\mathbf{e}_i\phi = \phi\mathbf{e}_i \Rightarrow \phi\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i\phi = 0 \Rightarrow 2(\phi \wedge \mathbf{e}_i) = 0.$$

Os pseudo-escalares comutam ou não dependendo da dimensão do espaço. De fato, seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq j \leq n$, onde $n = p + q$. Então $\mathbf{e}_{12\dots n}\mathbf{e}_j = (-1)^{n-1}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_{12\dots n}$.

Portanto, se n for par, o pseudo-escalar $\eta = \mathbf{e}_{12\dots n}$ anticomuta com $\{\mathbf{e}_i\}$. No entanto, se n for ímpar, η comuta com $\{\mathbf{e}_i\}$.

Agora resta analisar o caso de um k-vetor, onde $1 \leq k \leq n$. Nessas condições, considere $\xi_k \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{p,q})$ arbitrário que pode ser escrito como $\xi_k = a^{i_1 i_2 \cdots i_k}\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k}$.

Queremos os elementos ξ_k tais que $\xi_k\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j\xi_k, \forall j \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq j \leq n$. Para tanto, suponha k arbitrário porém fixo, e tome os j e divida-os como

(i) $j \neq \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Então $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k}\mathbf{e}_j = (-1)^k\mathbf{e}_j\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k}$;

(ii) $j = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Então $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k}\mathbf{e}_j = (-1)^{k-1}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k}$.

Portanto $\xi_k \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{p,q})$ não comuta com todos os $\{\mathbf{e}_j\}$ e desse modo não pertence ao centro. □

▶ **Teorema 2:** *(Marcel Riesz) Uma base ortonormal $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ gera uma álgebra de dimensão 2^n a menos que o pseudo-escalar $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\dots\mathbf{e}_n$ seja um múltiplo escalar da identidade. (Para as ACs reais o caso excepcional ocorre quando $\eta = \mathbf{e}_{12\dots n} = \pm I$. Para as ACs complexas, o caso excepcional ocorre quando $\eta = \pm I$ ou $\pm iI$).* ◀

Demonstração: Para começar, com apenas uma exceção o produto de um ou mais elementos da base $\mathfrak{B}$ anticomuta com pelo menos um dos elementos de $\mathfrak{B}$. Para tanto, o produto de um desses elementos anticomuta com qualquer elemento que aparece no produto. Também notamos que o produto de um número ímpar desses elementos anticomuta com qualquer elemento que não aparece no produto. O único produto que comuta com todos os $\{\mathbf{e}_i\}$ é o pseudo-escalar $\eta = \mathbf{e}_{12\dots n}$ quando n é ímpar, conforme o Lema 2. A demonstração do teorema é feita por contradição [Roc06a]. Considere os produtos que não são linearmente independentes

$$\Lambda(V) \ni a^0 + a^i\mathbf{e}_i + a^{ij}\mathbf{e}_{ij} + \cdots + p\mathbf{e}_{12\dots n} = 0$$

que também podem ser escritos na notação de índices múltiplos, neste caso existe um conjunto de coeficientes $a^{i_1 i_2 \dots i_k}$ com alguns desses não nulos tais que

$$\sum_{k=0}^{n} a^{i_1 i_2 \dots i_k}\mathbf{e}_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0 \tag{1.3}$$

Se o coeficiente de I é não nulo na Eq.(1.3), podemos dividir a equação por esse coeficiente, obtendo

$$I + \sum_{k=0}^{n} b^{i_1 i_2 \dots i_k}\mathbf{e}_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0 \tag{1.4}$$

onde a soma não inclui a matriz identidade. Por outro lado, se o coeficiente de I na Eq.(1.4) for nulo, podemos retirar um termo com coeficiente não nulo, digamos $\mathbf{e}_{m_1 m_2 \dots m_k}$ e multiplicar a equação por $\mathbf{e}^{-1}_{m_1 m_2 \dots m_k} =$

$\pm\mathbf{e}_{m_1m_2\ldots m_k}$. Dessa maneira podemos sempre obter uma equação do mesmo tipo da Eq.(1.4) a partir da Eq.(1.3). Se todos os coeficientes $b^{i_1i_2\ldots i_k}$ forem nulos, já chegamos à contradição de que $I = 0$. Se a soma na Eq.(1.4) contém um produto, digamos $\mathbf{e}_{m_1m_2\ldots m_k}$ que anticomuta com algum $\mathbf{e}_m$, então podemos multiplicar a Eq.(1.4) pela esquerda por $\mathbf{e}_m$ e pela direita por $\mathbf{e}_m^{-1}$ e obtemos

$$I + \sum_{k=0}^{n} b^{i_1i_2\ldots i_k}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_{i_1i_2\ldots i_k}\mathbf{e}_m^{-1} = 0$$

Notamos que $\mathbf{e}_m\mathbf{e}_{m_1m_2\ldots m_k}\mathbf{e}_m^{-1} = -\mathbf{e}_{m_1m_2\ldots m_k}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^{-1} = -\mathbf{e}_{m_1m_2\ldots m_k}$. Assim podemos somar a Eq.(1.4) à Eq.(1.3) e obter uma nova equação que a menos de um fator 2 é idêntica à Eq.(1.3) exceto que agora irá aparecer pelo menos um termo ($\mathbf{e}_{m_1m_2\ldots m_k}$) a menos na soma. Se n é par, o processo pode ser repetido até que a soma se reduza a zero e obtemos a contradição $I = 0$. Se n é ímpar o processo pode ser efetivado até que tenhamos $I + \alpha\eta = 0$. Assim obtemos novamente uma contradição a menos que η seja um múltiplo escalar da identidade.□

As classes das possíveis ACs não-universais são restringidas pelo seguinte teorema:

▶ **Teorema 3:** *Se a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ gerada por uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ não é universal, então n é ímpar. Além disso, se a álgebra de Clifford for real e não for universal, então $p - q - 1$ é um múltiplo inteiro de 4.* ◀

Demonstração: A primeira frase desse teorema vem da demonstração do Teorema de Marcel Riesz [Rie58]. A segunda frase segue da condição de que $\eta^2 = 1$. Portanto,

$$\eta^2 = \mathbf{e}_{12\ldots n}\mathbf{e}_{12\ldots n} = (-1)^{n(n-1)/2}\mathbf{e}_{n\ldots 21}\mathbf{e}_{12\ldots n} = (-1)^{n(n-1)/2}(-1)^q I$$

Já que $\eta^2 = I$, temos que $n(n-1)/2 + q = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$. Sendo n ímpar por hipótese, $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow (2m+1)(2m) + 2q = 4k \Rightarrow 2m + 2q = 4(k - m^2)$$

Mas $2m = n - 1 = p + q - 1$. E então a equação se torna

$$p + 3q - 1 = 4(k - m^2) \Rightarrow p + 3q - 1 - 4q = 4(k - m^2) - 4q \Rightarrow p - q - 1 = 4(k - m^2 - q)$$

□

1.5 Álgebra de Clifford (2)

Seja (V, g) um espaço quadrático e $T(V)$ a álgebra tensorial. Considere o ideal J de $T(V)$ gerado por elementos da forma $\sum_i a_i \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - g(\mathbf{v}, \mathbf{v})1_T) \otimes b_i$, com $a_i, b_i \in T(V)$ e 1_T é a identidade da álgebra tensorial. Podemos também dizer que o ideal J é gerado por $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})1_T$ [Vaz05, Roc02].

Para construirmos a álgebra quociente $T(V)/J$ considere a relação de equivalência

$$a \sim b \Leftrightarrow a = b + x, \quad x \in J.$$

Por enquanto o produto entre classes de equivalência será dado por $\diamond$

$$[a] \diamond [b] = [a \otimes b]$$

Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$, podemos calcular o produto $\mathbf{v} \diamond \mathbf{u}$ de acordo com a definição acima

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} &= 1/2(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + 1/2(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) - g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \\
&= 1/2(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + 1/2[(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \\
&\quad -\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - g(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{u}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}, \mathbf{u})]
\end{aligned}$$

O termo em colchetes está em J, de modo que $\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\sim 1/2(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})+g(\mathbf{v},\mathbf{u})$ ou ainda $\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\sim\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}+g(\mathbf{v},\mathbf{u})$. Portanto podemos escrever o produto de vetores na álgebra quociente $T(V)/J$ como

$$\boxed{\mathbf{v}\diamond\mathbf{u}=\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}+g(\mathbf{v},\mathbf{u})}$$

Generalizando as expressões acima para $\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w}\in V$ vem

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}=\frac{1}{3}(\mathbf{v}\otimes(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})-\mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})+\mathbf{w}\otimes(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}))\tag{1.5}$$

Para os dois últimos termos da Eq.(1.5) escrevemos

$$\mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})\sim\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}-g(\mathbf{v},\mathbf{w})\mathbf{u}\qquad\mathbf{w}\otimes(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})\sim\mathbf{w}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-g(\mathbf{v},\mathbf{u})\mathbf{w}\tag{1.6}$$

Usando

$$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}+\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\sim 2g(\mathbf{u},\mathbf{v})\qquad\mathbf{w}\otimes\mathbf{v}+\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\sim 2g(\mathbf{w},\mathbf{v})$$

podemos escrever a Eq.(1.6) como

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})&\sim-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}+2g(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{w}-g(\mathbf{v},\mathbf{w})\mathbf{u}\\ \mathbf{w}\otimes(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})&\sim-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}+2g(\mathbf{w},\mathbf{v})\mathbf{u}-g(\mathbf{v},\mathbf{u})\mathbf{w}\end{aligned}\tag{1.7}$$

Substituindo a Eq.(1.7) na Eq.(1.5) obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}&=\frac{1}{3}(\mathbf{v}\otimes(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})+\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}-2g(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{w}+g(\mathbf{v},\mathbf{w})\mathbf{u}\\ &\quad-\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}+2g(\mathbf{w},\mathbf{v})\mathbf{u}-g(\mathbf{v},\mathbf{u})\mathbf{w})\\ &=\mathbf{v}\otimes(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})+g(\mathbf{v},\mathbf{w})\mathbf{u}-g(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{w}\end{aligned}$$

Lembrando de $\tau(\mathbf{v})\rfloor(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})$ podemos escrever

$$\mathbf{v}\otimes(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})\sim\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}+\tau(\mathbf{v})\rfloor(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})$$

ou seja, o produto de um vetor e um 2-vetor na álgebra quociente $T(V)/J$ pode ser escrito na forma

$$\boxed{\mathbf{v}\diamond(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})\sim\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}+\tau(\mathbf{v})\rfloor(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})}$$

que é a generalização de $\mathbf{v}\diamond\mathbf{u}=\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}+g(\mathbf{v},\mathbf{u})$.

Portanto, a generalização do produto entre um vetor e um p-vetor na álgebra quociente é dada por

$$\mathbf{v}\diamond A_p=\mathbf{v}\wedge A_p+\tau(\mathbf{v})\rfloor A_p\qquad A_p\diamond\mathbf{v}=A_p\wedge\mathbf{v}+A_p\lfloor\tau(\mathbf{v})\tag{1.8}$$

A álgebra quociente $T(V)/J$ é uma álgebra de Clifford[7] [Ben87, Sny97, Hal74]. De fato,

$$\boxed{\mathbf{v}\diamond\mathbf{u}+\mathbf{u}\diamond\mathbf{v}=2g(\mathbf{v},\mathbf{u})1_{T(V)/J}}\tag{1.9}$$

Agora veremos o resultado que garante que a AC construída a partir da álgebra quociente da álgebra tensorial pelo ideal J é de fato uma AC universal.

[7] A partir deste momento evitaremos de escrever explicitamente a aplicação de Clifford γ deixando-a subentendida e também abandonaremos o uso de $\diamond$ e denotaremos o produto em $\mathcal{C}\ell(V,g)$ simplesmente por justaposição. Escrevemos portanto, $\mathbf{vu}+\mathbf{uv}=2g(\mathbf{v},\mathbf{u})1_{T(V)/J}$ ao invés de $\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u})+\gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v})=2g(\mathbf{v},\mathbf{u})1_{\mathcal{A}}$ e $\mathbf{v}A_p=\mathbf{v}\wedge A_p+\tau(\mathbf{v})\rfloor A_p$ no lugar de $\mathbf{v}\diamond A_p=\mathbf{v}\wedge A_p+\tau(\mathbf{v})\rfloor A_p$.

▶ **Teorema 4:** *Sejam (V, g) espaço quadrático, $\mathcal{C}\ell(V, g) = T(V)/J$ álgebra de Clifford e $(\mathcal{A}, \rho)$ uma álgebra de Clifford para (V, g). Então existe um homomorfismo $\phi\colon \mathcal{C}\ell(V, g) \to \mathcal{A}$ tal que $\rho = \phi \circ \gamma$, onde γ é a aplicação de Clifford $\gamma\colon V \to \mathcal{C}\ell(V, g)$.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\ell(V,g) \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[dl, "\rho=\phi\circ\gamma"] \\
(\mathcal{A},\rho) &
\end{tikzcd}
$$

◀

Demonstração: Para a AC $(\mathcal{A}, \rho)$ temos $\rho\colon V \to \mathcal{A}$ tal que $\rho(\mathbf{v})^2 = Q(\mathbf{v})$. Podemos estender a aplicação ρ para $T(V)$ como $\rho'\colon T(V) \to \mathcal{A}$ dada por

$$\rho'(\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_k) = \rho'(\mathbf{v}_1)\ldots\rho'(\mathbf{v}_k).$$

Seja o espaço quociente $T(V)/\ker\rho'$, onde os elementos são as classes de equivalência $[x]$ construídas por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \ker\rho'$. Podemos ainda escrever $[x] = \pi(x)$, onde $x \in T(V)$ e $\pi\colon T(V) \to T(V)/\ker\rho'$. Nesse caso existe uma aplicação $\phi\colon T(V)/\ker\rho' \to \mathcal{A}$ dada por $\phi([x]) = \rho'(x), \quad \forall x \in T(V)$, que é um homomorfismo,

$$\phi([x]\,[y]) = \phi([x \otimes y]) = \rho'(x \otimes y) = \rho'(x)\rho'(y) = \phi([x])\phi([y]).$$

Por outro lado, olhando para ρ' vemos que $\rho'(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - Q(\mathbf{v})) = 0$, ou seja, o ideal $J \subseteq \ker\rho'$. Portanto $\mathcal{C}\ell(V, g) = T(V)/J \subseteq T(V)/\ker\rho'$ uma vez que os elementos de $T(V)/J$ são dados pelas classes de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in J \subseteq \ker\rho'$. O homomorfismo ϕ pode ser restringido como $\phi\colon \mathcal{C}\ell(V, g) \to \mathcal{A}$ e temos para $\mathbf{v} \in V$ que $\phi([\mathbf{v}]) = \rho'(\mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v})$. Uma vez que $[\mathbf{v}] = \gamma(\mathbf{v})$ segue que $\rho = \phi \circ \gamma$, o que demonstra a universalidade de $\mathcal{C}\ell(V, g)$. $\square$

1.5.1 Algumas Considerações Gerais

Seja $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ uma base ortogonal de V. Da equação $\mathbf{v}A_p = \mathbf{v} \wedge A_p + \tau(\mathbf{v})\rfloor A_p$ vemos que

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, \quad i \neq j \tag{1.10}$$

que podemos utilizar quantas vezes for necessário para mostrar que

$$\mathbf{e}_{\mu_1}\mathbf{e}_{\mu_2}\ldots\mathbf{e}_{\mu_p} = \mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \mathbf{e}_{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\mu_p}, \quad \mu_i \neq \mu_j, \quad \forall i, j = 1, \ldots, p$$

A dimensão de $\mathcal{C}\ell(V, g)$ é $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$, ou seja, $\dim\mathcal{C}\ell(V, g) = 2^{\dim V}$. A álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V, g)$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada[8]. Podemos escrever

$$\mathcal{C}\ell(V, g) = \mathcal{C}\ell^{+}(V, g) \oplus \mathcal{C}\ell^{-}(V, g),$$

[8] Dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é G-graduada se seu espaço vetorial subjacente V for G-graduado, ou seja, se existem subespaços $\mathcal{A}_k$ $(k \in G)$ tais que $\mathcal{A} = \oplus_k\mathcal{A}_k$ e se dados $x_k \in \mathcal{A}_k$, $y_l \in \mathcal{A}_l$ temos $x_k y_l \in \mathcal{A}_{k+l}$. Os elementos de $\mathcal{A}_k$ são ditos homogêneos de grau k. O número k é denominado grau de $x_k \in \mathcal{A}_k$ e será denotado por $\deg(x_k)$ ou $|x_k|$.

onde $\mathcal{C}\ell^{\pm}(V,g) = \Pi_{\pm}(\mathcal{C}\ell(V,g)) = \dfrac{1}{2}(1 \pm \#)(\mathcal{C}\ell(V,g))$. Temos então que

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C}\ell^{+}(V,g)\mathcal{C}\ell^{+}(V,g) \subset \mathcal{C}\ell^{+}(V,g), & \mathcal{C}\ell^{+}(V,g)\mathcal{C}\ell^{-}(V,g) \subset \mathcal{C}\ell^{-}(V,g) \\ \mathcal{C}\ell^{-}(V,g)\mathcal{C}\ell^{+}(V,g) \subset \mathcal{C}\ell^{-}(V,g), & \mathcal{C}\ell^{-}(V,g)\mathcal{C}\ell^{-}(V,g) \subset \mathcal{C}\ell^{+}(V,g) \end{array}$$

Uma vez que $\mathcal{C}\ell^{+}(V,g)\mathcal{C}\ell^{+}(V,g) \subset \mathcal{C}\ell^{+}(V,g)$, o conjunto $\mathcal{C}\ell^{+}(V,g)$ é uma *subálgebra* da álgebra $\mathcal{C}\ell(V,g)$, chamada de *subálgebra par*.

$$\mathcal{C}\ell^{+}(V,g) = \left\{ A \in \mathcal{C}\ell(V,g) \mid A = \#A = \hat{A} \right\}.$$

1.6 Álgebra de Clifford (3)

1.6.1 Operadores de Criação e Aniquilação

Em $\mathcal{G}(V)$ podemos realizar o produto exterior entre o vetor $\mathbf{v}$ e o multivetor A como $\mathbf{v} \wedge A$ ou $A \wedge \mathbf{v}$. Como o resultado é um multivetor, interpretamos esse produto exterior como um elemento do espaço dos endomorfismos[9] de $\Lambda(V)$, denotado por $\mathrm{End}(\Lambda(V))$. Definimos $E\colon V \to \mathrm{End}(\Lambda(V))$ por [Vaz05]

$$E(\mathbf{v})(A) = \mathbf{v} \wedge A$$

onde E é dito um *operador de criação*. Olhando para o produto exterior entre $\mathbf{v}$ e A na ordem reversa, i.e., $A \wedge \mathbf{v}$, podemos definir outro operador que definimos por $E^{\dagger}\colon V \to \mathrm{End}(\Lambda(V))$

$$E^{\dagger}(\mathbf{v})(A) = A \wedge \mathbf{v}$$

Existe uma relação entre os operadores E e $E^{\dagger}$. Considerando o caso em que A é um k-vetor temos

$$\mathbf{v} \wedge A_k = (-1)^k A_k \wedge \mathbf{v}, \quad \text{donde escrevemos } \mathbf{v} \wedge A = (\#A) \wedge \mathbf{v},$$

segue portanto que

$$E(\mathbf{v}) = E^{\dagger}(\mathbf{v})\# \qquad E^{\dagger}(\mathbf{v}) = E(\mathbf{v})\#$$

Outra operação sobre multivetores são as contrações à esquerda e à direita por um covetor. Utilizando estas operações definimos os operadores I e $I^{\dagger}$. O *operador de aniquilação* $I\colon V^* \to \mathrm{End}(\Lambda(V))$ é definido por

$$I(\alpha)(A) = \alpha \rfloor A.$$

Já o operador $I^{\dagger}$ é definido como

$$I^{\dagger}(\alpha)(A) = A \lfloor \alpha,$$

e a relação entre esses operadores segue direto da relação entre as contrações à esquerda e à direita

$$I(\alpha) = -I^{\dagger}(\alpha)\# \qquad I^{\dagger}(\alpha) = -I(\alpha)\#$$

[9] Uma aplicação $\phi\colon X \to Y$ é um homomorfismo se $\phi(a * b) = \phi(a) \bullet \phi(b)$, onde $*$ é a operação em X e $\bullet$ a operação em Y. Se $Y = X$ então esse homomorfismo é dito um endomorfismo.

Da propriedade de anti-comutatividade do produto exterior de dois vetores segue de imediato a relação de comutação entre os operadores do tipo criação:

$$\boxed{E(\mathbf{v})E(\mathbf{u}) + E(\mathbf{u})E(\mathbf{v}) = 0} \tag{1.11}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}(E(\mathbf{v})E(\mathbf{u}) + E(\mathbf{u})E(\mathbf{v}))(A) &= (E(\mathbf{v})E(\mathbf{u}))(A) + (E(\mathbf{u})E(\mathbf{v}))(A) \\ &= \mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge A + \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge A = \mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge A - \mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge A = 0\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v},\mathbf{u} \in V, A \in \Lambda(V)$. Do mesmo modo temos que

$$E^\dagger(\mathbf{v})E^\dagger(\mathbf{u}) + E^\dagger(\mathbf{u})E^\dagger(\mathbf{v}) = 0.$$

Temos também a relação de comutação entre os operadores do tipo aniquilação:

$$\boxed{I(\alpha)I(\beta) + I(\beta)I(\alpha) = 0} \tag{1.12}$$

$\forall\alpha,\beta \in V^*$. Com efeito,

$$\begin{aligned}(I(\alpha)I(\beta) + I(\beta)I(\alpha))(A) &= (I(\alpha)I(\beta))(A) + (I(\beta)I(\alpha))(A) \\ &= \alpha\rfloor(\beta\rfloor A) + \beta\rfloor(\alpha\rfloor A) = \alpha\rfloor(\beta\rfloor A) + (\beta\wedge\alpha)\rfloor A \\ &= \alpha\rfloor(\beta\rfloor A) - (\alpha\wedge\beta)\rfloor A = \alpha\rfloor\beta\rfloor A - \alpha\rfloor\beta\rfloor A = 0\end{aligned}$$

Analogamente segue

$$I^\dagger(\alpha)I^\dagger(\beta) + I^\dagger(\beta)I^\dagger(\alpha) = 0.$$

E finalmente, temos a relação entre os operadores de criação e aniquilação.

$$\boxed{I(\alpha)E(\mathbf{v}) + E(\mathbf{v})I(\alpha) = \alpha(\mathbf{v})} \tag{1.13}$$

$$I^\dagger(\alpha)E^\dagger(\mathbf{v}) + E^\dagger(\mathbf{v})I^\dagger(\alpha) = \alpha(\mathbf{v})$$

Demonstraremos apenas o primeiro resultado uma vez que o segundo é obtido de maneira completamente análoga

$$\begin{aligned}(I(\alpha)E(\mathbf{v}) + E(\mathbf{v})I(\alpha))(A) &= (I(\alpha)E(\mathbf{v}))(A) + (E(\mathbf{v})I(\alpha))(A) \\ &= \alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge A) + \mathbf{v}\wedge(\alpha\rfloor A) = (\alpha\rfloor\mathbf{v})\wedge A - \mathbf{v}\wedge(\alpha\rfloor A) + \mathbf{v}\wedge(\alpha\rfloor A) \\ &= (\alpha\rfloor\mathbf{v})\wedge A = \alpha(\mathbf{v})A\end{aligned}$$

1.6.2 Álgebras de Clifford $\mathcal{C}\ell(V,+g)$ e $\mathcal{C}\ell(V,-g)$

Seja V um espaço vetorial munido de uma correlação simétrica $\flat\colon V \to V^*$ e os operadores $E\colon V \to \mathrm{End}(\Lambda(V))$ e $I\colon V^* \to \mathrm{End}(\Lambda(V))$, denotando a composição de I e $\flat$ por $I\circ\flat$ de modo que $I\circ\flat\colon V \to \mathrm{End}(\Lambda(V))$, podemos considerar a soma ou a diferença dos operadores E e $I\circ\flat$. Assim definimos $\gamma_\pm\colon V \to \mathrm{End}(\Lambda(V))$ como

$$\boxed{\gamma_\pm = E \pm I\circ\flat} \tag{1.14}$$

► **Teorema 5:** *As aplicações $\gamma_\pm$ definidas acima são aplicações de Clifford e as quantidades $\gamma_\pm(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V$ satisfazem*

$$\boxed{\gamma_\pm(\mathbf{v})\gamma_\pm(\mathbf{u}) + \gamma_\pm(\mathbf{u})\gamma_\pm(\mathbf{v}) = \pm 2g(\mathbf{v},\mathbf{u})1_{\mathcal{A}}}$$

gerando a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V,\pm g)$. ◄

Demonstração: Usando as definições de $\gamma_\pm$ e as relações de comutação Eq.(1.11), Eq.(1.12) e Eq.(1.13)

$$\begin{aligned}
\gamma_\pm(\mathbf{v})\gamma_\pm(\mathbf{u}) &= [E(\mathbf{v}) \pm I(\mathbf{v}_\flat)]\,[E(\mathbf{u}) \pm I(\mathbf{u}_\flat)] \\
&= E(\mathbf{v})E(\mathbf{u}) \pm E(\mathbf{v})I(\mathbf{u}_\flat) \pm I(\mathbf{v}_\flat)E(\mathbf{u}) + I(\mathbf{v}_\flat)I(\mathbf{u}_\flat) \\
\therefore \gamma_\pm(\mathbf{v})\gamma_\pm(\mathbf{u}) + \gamma_\pm(\mathbf{u})\gamma_\pm(\mathbf{v}) &= E(\mathbf{v})E(\mathbf{u}) \pm E(\mathbf{v})I(\mathbf{u}_\flat) \pm I(\mathbf{v}_\flat)E(\mathbf{u}) + I(\mathbf{v}_\flat)I(\mathbf{u}_\flat) \\
&+ E(\mathbf{u})E(\mathbf{v}) \pm E(\mathbf{u})I(\mathbf{v}_\flat) \pm I(\mathbf{u}_\flat)E(\mathbf{v}) + I(\mathbf{u}_\flat)I(\mathbf{v}_\flat) \\
&= \pm\mathbf{u}_\flat(\mathbf{v}) \pm \mathbf{v}_\flat(\mathbf{u}) = \pm 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})
\end{aligned}$$

□

1.6.3 Suficiência da Álgebra $\mathcal{C}\ell(V, +g)$

Acabamos de definir duas álgebras de Clifford, $\mathcal{C}\ell(V, +g)$ e $\mathcal{C}\ell(V, -g)$, mostraremos agora que não necessitamos trabalhar com as duas álgebras provando que uma delas é redundante [Vaz05].

As Aplicações de Clifford $\gamma^\dagger_\pm$

Sabemos que o operador $E^\dagger(\mathbf{v})$ consiste na multiplicação exterior à direita. Da mesma maneira que $I(\mathbf{v}_\flat)$ consiste na contração à esquerda pelo covetor $\mathbf{v}_\flat$, e $I^\dagger(\mathbf{v}_\flat)$ consiste na contração à direita. Assim definimos $\gamma^\dagger_\pm : V \to \mathrm{End}(\Lambda(V))$ formado de operadores que agem somente à direita

$$\gamma^\dagger_\pm = E^\dagger \pm I^\dagger \circ \flat$$

Com cálculos semelhantes e fazendo-se uso das relações de comutação encontramos que

$$\gamma^\dagger_\pm(\mathbf{v})\gamma^\dagger_\pm(\mathbf{u}) + \gamma^\dagger_\pm(\mathbf{u})\gamma^\dagger_\pm(\mathbf{v}) = \pm 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Essa relação nos diz que as quantidades $\left\{\gamma^\dagger_\pm(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\right\}$ satisfazem as mesmas relações das quantidades $\{\gamma_\pm(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$. Logo, denotamos por $\mathcal{C}\ell^\dagger(V, \pm g)$ as álgebras geradas por $\left\{\gamma^\dagger_\pm(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\right\}$.

Relação entre $\gamma_\pm$ e $\gamma^\dagger_\pm$

Do estudo dos operadores de criação e aniquilação temos dois importantes resultados:

$$\gamma^\dagger_\pm = E^\dagger \pm I^\dagger \circ \flat = E\# \pm (-I\#) \circ \flat = E\# \mp (I \circ \flat)\# = [E \mp (I \circ \flat)]\,\#$$

ou seja,

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma^\dagger_\pm &= \gamma_\mp\# \\ \gamma_\mp &= \gamma^\dagger_\pm\#\end{aligned}}$$

Esse resultado implica que a álgebra gerada por γ_- é isomorfa à álgebra gerada por $\gamma^\dagger_+$, assim como a álgebra gerada por γ_+ é isomorfa à álgebra gerada por $\gamma^\dagger_-$. Explicitamente:

$$\mathcal{C}\ell^\dagger(V, +g) \simeq \mathcal{C}\ell(V, -g), \qquad \mathcal{C}\ell^\dagger(V, -g) \simeq \mathcal{C}\ell(V, +g)$$

Portanto conclui-se que *não* há necessidade de considerar as duas ACs $\mathcal{C}\ell(V, +g)$ e $\mathcal{C}\ell(V, -g)$, onde cada uma satisfaz relações de comutações distintas. Basta tomar uma delas, $\mathcal{C}\ell(V, +g)$ por exemplo, e considerarmos a ação dos seus geradores tanto à esquerda como à direita.

É fácil ver que o produto entre $\gamma_+(\mathbf{v})$ e $\gamma^\dagger_+(\mathbf{u})$ comuta, ou seja,

$$\gamma_+(\mathbf{v})\gamma^\dagger_+(\mathbf{u}) - \gamma^\dagger_+(\mathbf{u})\gamma_+(\mathbf{v}) = 0 \tag{1.15}$$

Com efeito, usando as definições temos que

$$\begin{aligned}
&\gamma_+(\mathbf{v})\gamma_+^\dagger(\mathbf{u}) - \gamma_+^\dagger(\mathbf{u})\gamma_+(\mathbf{v})\\
&= \gamma_+(\mathbf{v})\gamma_-(\mathbf{u})\# - \gamma_-(\mathbf{u})\#\gamma_+(\mathbf{v})\\
&= (E(\mathbf{v}) + I(\mathbf{v}_\flat))(E(\mathbf{u}) - I(\mathbf{u}_\flat))\#A - (E(\mathbf{u}) - I(\mathbf{u}_\flat))\#(E(\mathbf{v}) + I(\mathbf{v}_\flat))A\\
&= (E(\mathbf{v}) + I(\mathbf{v}_\flat))(E(\mathbf{u}) - I(\mathbf{u}_\flat))\hat{A} - (E(\mathbf{u}) - I(\mathbf{u}_\flat))\#(\mathbf{v}\wedge A + \mathbf{v}_\flat\rfloor A)\\
&= (E(\mathbf{v}) + I(\mathbf{v}_\flat))(\mathbf{u}\wedge\hat{A} - \mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{A}) - (E(\mathbf{u}) - I(\mathbf{u}_\flat))(\hat{\mathbf{v}}\wedge\hat{A} + \widehat{\mathbf{v}_\flat\rfloor A})\\
&= \mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\hat{A} - \mathbf{v}\wedge(\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{A}) + (\mathbf{v}_\flat\rfloor\mathbf{u})\wedge\hat{A} + \hat{\mathbf{u}}\wedge(\mathbf{v}_\flat\rfloor\hat{A}) - \mathbf{v}_\flat\rfloor(\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{A})\\
&-\mathbf{u}\wedge\hat{\mathbf{v}}\wedge\hat{A} - \mathbf{u}\wedge(\widehat{\mathbf{v}_\flat\rfloor A}) + \mathbf{u}_\flat\rfloor(\hat{\mathbf{v}}\wedge\hat{A}) + \mathbf{u}_\flat\rfloor(\widehat{\mathbf{v}_\flat\rfloor A})\\
&= \mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\hat{A} - \mathbf{v}\wedge(\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{A}) + (\mathbf{v}_\flat\rfloor\mathbf{u})\wedge\hat{A} - \mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}_\flat\rfloor\hat{A}) - \mathbf{v}_\flat\rfloor(\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{A})\\
&+\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\hat{A} - \mathbf{u}\wedge(\widehat{\mathbf{v}_\flat\rfloor A}) + (\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{\mathbf{v}})\wedge\hat{A} + \hat{\mathbf{v}}\wedge(\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{A}) + \mathbf{u}_\flat\rfloor(\widehat{\mathbf{v}_\flat\rfloor A})\\
&= (\mathbf{v}_\flat\rfloor\mathbf{u})\wedge\hat{A} - \mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}_\flat\rfloor\hat{A}) - \mathbf{v}_\flat\rfloor(\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{A}) - \mathbf{u}\wedge(\widehat{\mathbf{v}_\flat\rfloor A})\\
&+(\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{\mathbf{v}})\wedge\hat{A} + \mathbf{u}_\flat\rfloor(\widehat{\mathbf{v}_\flat\rfloor A})
\end{aligned}$$

Como $g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}_\flat(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\flat(\mathbf{u}) = g(\mathbf{v},\mathbf{u})$ temos $(\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{\mathbf{v}})\wedge\hat{A} = -(\mathbf{v}_\flat\rfloor\mathbf{u})\wedge\hat{A}$. Além disso $-\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}_\flat\rfloor\hat{A}) = -\mathbf{u}\wedge(\hat{\mathbf{v}}_\flat\rfloor\hat{A}) = -\mathbf{u}\wedge(\widehat{\hat{\mathbf{v}}_\flat\rfloor A}) = \mathbf{u}\wedge(\widehat{\mathbf{v}_\flat\rfloor A})$. Vemos tembém que $\mathbf{u}_\flat\rfloor(\widehat{\mathbf{v}_\flat\rfloor A}) = \mathbf{u}_\flat\rfloor(\hat{\mathbf{v}}_\flat\rfloor\hat{A}) = -\mathbf{u}_\flat\rfloor(\mathbf{v}_\flat\rfloor\hat{A})$ para $A \in \Lambda_p(V)$ e o resultado para $A \in \Lambda(V)$ segue por distributividade. Por outro lado, $-\mathbf{v}_\flat\rfloor(\mathbf{u}_\flat\rfloor\hat{A}) = -(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})_\flat\rfloor\hat{A} = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})_\flat\rfloor\hat{A} = \mathbf{u}_\flat\rfloor(\mathbf{v}_\flat\rfloor\hat{A})$. Assim chegamos ao resultado $\gamma_+(\mathbf{v})\gamma_+^\dagger(\mathbf{u}) - \gamma_+^\dagger(\mathbf{u})\gamma_+(\mathbf{v}) = 0$. Resultado equivalente a $\gamma_+(\mathbf{v})\gamma_-(\mathbf{u}) - \gamma_-(\mathbf{u})\gamma_+(\mathbf{v}) = 0$.

A Eq.(1.15) é importante porque permite escrever o produto agindo em ambos os lados e satisfaz a propriedade de associatividade. De fato, $A\gamma_+(\mathbf{v}) = \gamma_+^\dagger(\mathbf{v})A$ para $\forall\mathbf{v} \in V \hookrightarrow \Lambda(V), \forall A \in \Lambda(V)$, segue também

$$(\gamma_+(\mathbf{v})A)\gamma_+(\mathbf{u}) = \gamma_+(\mathbf{v})(A\gamma_+(\mathbf{u})) = \gamma_+(\mathbf{v})A\gamma_+(\mathbf{u})$$

Resumindo, basta considerar a álgebra gerada por $\{\gamma_+(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$ agindo através da multiplicação à esquerda e à direita. Daqui em diante trabalharemos apenas com $\mathcal{C}\ell(V,+g) = \mathcal{C}\ell(V,g)$ passando a omitir o índice $+$ também nos geradores $\{\gamma(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$.

2 Classificação e Representação das Álgebras de Clifford

A fim de compreender mais sobre as álgebras de Clifford estudaremos sua classificação e representação [Bud89, Che54, Cli78, Cru90, Gil91]. Para isso apresentaremos resultados conhecidos e de grande importância nesta área. Podemos citar, por exemplo, a versão algébrica do Teorema de Atiyah-Bott-Shapiro conhecido como Teorema de Periodicidade e que possui uma versão generalizada [Ati64, Vaz05]. Além disso, apresentamos uma série de definições e resultados [Ben87, Bae01] de maneira a estabelecer uma ponte até o Teorema da Decomposição de Wedderburn e por fim, estabelendo combinações de isomorfismos encontramos as ACs fundamentais que ao todo são quatro mas são o pilar sobre o qual classificamos todas as ACs reais e complexas.

2.1 Ideais

Uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ junto de um mapa bilinear

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

onde ab denota o produto da álgebra entre os elementos a e b.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Um subespaço vetorial $I_L \subset \mathcal{A}$ é chamado um *ideal à esquerda* de $\mathcal{A}$ se $\mathcal{A}I_L \subset I_L$. Analogamente, a um conjunto $I_R \subset \mathcal{A}$ denominamos ideal à direita de $\mathcal{A}$ se $I_R\mathcal{A} \subset I_R$. Um conjunto $I \subset \mathcal{A}$ é um *ideal bilateral* (ou simplesmente *ideal*) de $\mathcal{A}$ se $\mathcal{A}I\mathcal{A} \subset I$. Obviamente ideais são subálgebras. Um elemento não-nulo $a \in \mathcal{A}$ é dito *nilpotente* se $a^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma álgebra ou ideal é nilpotente quando todos seus elementos são nilpotentes. Segue portanto que todo ideal nilpotente de $\mathcal{A}$ está contido em um único ideal nilpotente maximal, chamado de *radical*. Uma álgebra é *semi-simples* se seu radical for nulo.

► **Definição 4:** Uma álgebra é dita *simples* se seus únicos ideais são os triviais, desde que $\mathcal{A}$ não seja unidimensional e nilpotente.◄

Enunciamos vários resultados de álgebra, cuja demonstração pode ser encontrada em [Ben87] e outros bons livros de álgebra, com o objetivo de construir um caminho para o Teorema da Decomposição de Wedderburn na Seção 2.4.

► **Teorema 6:** *Uma álgebra é semi-simples se, e somente se, é simples ou soma direta de álgebras simples.* ◄

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é *associativa* se

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{para todo } a,b,c \in \mathcal{A}$$

Dizemos que uma *álgebra sem divisores de zero* é aquela onde se verifica a propriedade

$$ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Uma *álgebra de divisão* é uma álgebra sem divisores de zero. Se uma álgebra de divisão é associativa, então ela tem unidade 1 e cada elemento não nulo tem inverso único.

▶ **Definição 5:** Uma álgebra $\mathcal{A}$ é *alternativa* se para todo $a, b \in \mathcal{A}$ satisfaz as identidades

$$(aa)b = a(ab)$$
$$b(aa) = (ba)a$$

e *flexível* se $a(ba) = (ab)a$, veja [Sch95, Bae01].◀

Toda álgebra alternativa é flexível, pois $a(ab) = a^2b = (aa)b$. Uma álgebra de divisão alternativa possui unidade e admite inversa, que são únicas.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ com forma quadrática positiva definida $N\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ preserva norma, ou admite composição se $\forall a, b \in \mathcal{A}$

$$N(ab) = N(a)N(b)$$

▶ **Teorema 7:** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *e* $\mathbb{O}$ *são as únicas álgebras de divisão normadas.* ◀

▶ **Teorema 8:** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *e* $\mathbb{O}$ *são as únicas álgebras de divisão alternativas.* ◀

▶ **Teorema 9:** *Todas as álgebras de divisão têm dimensão* $1, 2, 4$ *ou* 8. ◀

As demonstrações dos Teoremas 7 e 8 podem ser encontradas em [Sch95] e a demonstração do Teorema 9 pode ser vista em [Bot58].

2.2 Teoremas sobre a Estrutura das Álgebras de Clifford

Nesta Seção apresentaremos os resultados responsáveis pela classificação das ACs reais e complexas na álgebras das matrizes [Vaz05, Roc06a]. No decorrer do texto passamos por resultados conhecidos e de grande relevância para esta abordagem, como exemplo citamos a Complexificação das Álgebras de Clifford, donde obtemos que uma AC complexa pode ser identificada por isomorfismo com o produto tensorial entre os números complexos e uma AC real. Daí, uma vez classificada as ACs reais, este resultado nos facilitará a vida quanto a classificação das ACs complexas. Outros resultados essenciais são o Teorema de Periodicidade e sua generalização [Ati64, Ma89, Bot58] donde é possível fazer combinações com isomorfismos e perceber que só é necessário conhecer quatro ACs uma vez que as restantes são obtidas à partir destas por combinações.

▶ **Definição 6:** (Produto Tensorial Graduado) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras graduadas. Dados $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ e $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$

$$(a_1 \hat{\otimes} b_1)(a_2 \hat{\otimes} b_2) = (-1)^{|b_1||a_2|} a_1 a_2 \hat{\otimes} b_1 b_2$$

onde $\hat{\otimes}$ é o produto tensorial usual e a notação chapéu é para lembrar que o produto leva em conta a graduação dos elementos envolvidos.◀

▶ **Teorema 10:** *Sejam* (V, g) *e* (V', g') *dois espaços quadráticos e* $\mathcal{C}\ell(V, g)$ *e* $\mathcal{C}\ell(V', g')$ *as suas respectivas álgebras de Clifford. Então*

$$\mathcal{C}\ell(V \oplus V', g \oplus g') \simeq \mathcal{C}\ell(V, g) \,\hat{\otimes}\, \mathcal{C}\ell(V', g')$$

onde $\simeq$ *denota um isomorfismo de álgebras de Clifford e* $V \oplus V'$ *a soma direta ortogonal de* V *e* V'. ◀

Demonstração: Seja $g \oplus g'$ o funcional bilinear simétrico definido em $V \oplus V'$, onde

$$(g \oplus g')(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{u} + \mathbf{u}') = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + g(\mathbf{v}', \mathbf{u}'), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V, \mathbf{v}', \mathbf{u}' \in V'.$$

Podemos definir uma aplicação $\Gamma\colon V \oplus V' \to \mathcal{C}\ell(V, g)\hat{\otimes}\mathcal{C}\ell(V', g')$ como

$$\Gamma(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{v}\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}\mathbf{v}'$$

onde está subentendido que $\mathbf{v} = \gamma(\mathbf{v})$ e $\mathbf{v}' = \gamma(\mathbf{v}')$, com $\gamma\colon V \to \mathcal{C}\ell(V, g)$ e $\gamma'\colon V' \to \mathcal{C}\ell(V', g')$. Essa aplicação Γ é uma aplicação de Clifford. Para tanto,

$$\begin{aligned}
(\Gamma(\mathbf{v} + \mathbf{v}'))^2 &= (\mathbf{v}\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}\mathbf{v}')(\mathbf{v}\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}\mathbf{v}') \\
&= (-1)^{0.1}\mathbf{v}^2\hat{\otimes}1 + (-1)^{0.0}\mathbf{v}\hat{\otimes}\mathbf{v}' + (-1)^{1.1}\mathbf{v}\hat{\otimes}\mathbf{v}' + (-1)^{1.0}1\hat{\otimes}(\mathbf{v}')^2 \\
&= \mathbf{v}^2\hat{\otimes}1 + \mathbf{v}\hat{\otimes}\mathbf{v}' - \mathbf{v}\hat{\otimes}\mathbf{v}' + 1\hat{\otimes}(\mathbf{v}')^2 = \mathbf{v}^2\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}(\mathbf{v}')^2 \\
&= g(\mathbf{v}, \mathbf{v})\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}g'(\mathbf{v}', \mathbf{v}') = (g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + g'(\mathbf{v}', \mathbf{v}'))1\hat{\otimes}1 \\
&= (g \oplus g')(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{v} + \mathbf{v}')1\hat{\otimes}1
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Considere $\mathcal{C}\ell(V \oplus V', g \oplus g')$ a álgebra de Clifford associada ao espaço quadrático $(V \oplus V', g \oplus g')$. Pelo Teorema 1 (da Universalidade da Álgebra), existe um homomorfismo $\phi\colon \mathcal{C}\ell(V \oplus V', g \oplus g') \to \mathcal{C}\ell(V, g)\hat{\otimes}\mathcal{C}\ell(V', g')$. Como

$$\dim \mathcal{C}\ell(V \oplus V', g \oplus g') = 2^{\dim(V \oplus V')} = 2^{\dim V} 2^{\dim V'} = \dim \mathcal{C}\ell(V, g)\hat{\otimes}\mathcal{C}\ell(V', g')$$

temos que ϕ é isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\ell(V, g)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{C}\ell(V', g') & V \oplus V' \arrow[l, "\Gamma"'] \arrow[dl, "\varrho"] \\
\mathcal{C}\ell(V \oplus V', g \oplus g') \arrow[u, "\phi"] &
\end{tikzcd}$$

□

A partir deste momento consideraremos álgebras de Clifford reais e complexas, para isso definiremos a *complexificação* de um espaço vetorial. Seja V um espaço vetorial, $V_{\mathbb{C}}$ é a sua complexificação com elementos da forma $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, com $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e i a unidade imaginária. Notamos que $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$.

Dada uma forma bilinear simétrica g em V, definimos a sua extensão $g_{\mathbb{C}}$ para $V_{\mathbb{C}}$ como $g_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2) = g(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + i(g(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + g(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2)).$$

► **Teorema 11:** *(Complexificação das Álgebras de Clifford) Sejam (V, g) espaço quadrático sobre $\mathbb{R}$ e $\mathcal{C}\ell(V, g)$ a álgebra de Clifford real associada. Considere a álgebra de Clifford complexa $\mathcal{C}\ell(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ para o espaço quadrático complexificado $(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$. Então*

$$\mathcal{C}\ell(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(V, g).$$

◄

Demonstração: Primeiramente observamos que a complexificação $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(V,g)$ é uma álgebra com o produto

$$(a \otimes A)(b \otimes B) = ab \otimes AB, \quad a, b \in \mathbb{C}, \; A, B \in \mathcal{C}\ell(V,g).$$

Definimos uma aplicação $\Gamma\colon V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(V,g)$ por

$$\Gamma = 1 \otimes \gamma$$

onde 1 denota a identidade e $\gamma\colon V \to \mathcal{C}\ell(V,g)$ a aplicação de Clifford. Portanto, para $a \otimes \mathbf{v} \in \mathbb{C} \otimes V = V_{\mathbb{C}}$ temos

$$\Gamma(a \otimes \mathbf{v}) = a \otimes \gamma(\mathbf{v}) = a \otimes \mathbf{v}.$$

A aplicação Γ é uma aplicação de Clifford. De fato

$$(\Gamma(a \otimes \mathbf{v}))^2 = (a \otimes \mathbf{v})(a \otimes \mathbf{v}) = a^2 \otimes g(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Se $\mathcal{C}\ell(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ é álgebra de Clifford, pela *universalidade da álgebra* existe um homomorfismo $\phi\colon \mathcal{C}\ell(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(V,g)$. Como $\dim \mathcal{C}\ell(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) = 2^{\dim V_{\mathbb{C}}} = 2^{2\dim V} = \dim(\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(V,g))$ temos que ϕ é isomorfismo.$\square$

► **Teorema 12:** *(Teorema de Periodicidade) Seja $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ a álgebra de Clifford do espaço quadrático $\mathbb{R}^n$. Temos os seguintes isomorfismos*

$$\boxed{\begin{array}{lr} \mathcal{C}\ell_{p+1,q+1} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q}, & (i) \\ \mathcal{C}\ell_{p+2,q} \simeq \mathcal{C}\ell_{2,0} \otimes \mathcal{C}\ell_{q,p}, & (ii) \\ \mathcal{C}\ell_{p,q+2} \simeq \mathcal{C}\ell_{0,2} \otimes \mathcal{C}\ell_{q,p}, & (iii) \end{array}}$$

onde $p > 0$, $q > 0$ e $\otimes$ denota o produto tensorial usual. ◄

Demonstração: Seja U espaço bidimensional onde está definida a forma bilinear simétrica g_U. Escrevemos $\mathbf{u} = u^1\mathbf{f}_1 + u^2\mathbf{f}_2 \in U$ em termos de uma base ortogonal $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

$$\mathbb{R}^{0,2} = (\mathbb{R}^2, g = \operatorname{diag}\begin{pmatrix}-1, & -1\end{pmatrix}); \mathbb{R}^{1,1} = (\mathbb{R}^2, g = \operatorname{diag}\begin{pmatrix}1, & -1\end{pmatrix}); \mathbb{R}^{2,0} = (\mathbb{R}^2, g = \operatorname{diag}\begin{pmatrix}1, & 1\end{pmatrix})$$

$$g_U(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 (u^1)^2 + \lambda_2 (u^2)^2,$$

$\lambda_1 = \pm 1$, $\lambda_2 = \pm 1$, onde escolhemos λ_1 e λ_2 de acordo com o caso: $U = \mathbb{R}^{2,0}$, $\mathbb{R}^{1,1}$ ou $\mathbb{R}^{0,2}$. Definimos uma aplicação linear

$$\Gamma(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes 1, \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}$$

e subentendido que $\mathbf{f}_1 = \rho(\mathbf{f}_1)$, $\mathbf{f}_2 = \rho(\mathbf{f}_2)$, $\mathbf{u} = \rho(\mathbf{u})$ e $\mathbf{v} = \gamma(\mathbf{v})$, com ρ e γ aplicações de Clifford $\rho\colon U \to \mathcal{C}\ell(U, g_U)$ e $\gamma\colon \mathbb{R}^{p,q} \to \mathcal{C}\ell_{p,q}$. Vamos mostrar que Γ é aplicação de Clifford.

$$\begin{aligned} (\Gamma(\mathbf{v} + \mathbf{u}))^2 &= (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes 1)(\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes 1) \\ &= (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2)^2 \otimes \mathbf{v}^2 + (\mathbf{u}\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}^2 \otimes 1. \end{aligned}$$

Lembrando que $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ é base *ortogonal*, temos $\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_2\mathbf{f}_1$. Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 &\overset{\text{Eq.(1.8)}}{=} \mathbf{u} \wedge (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2) + \mathbf{u} \rfloor (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2) = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2) + \mathbf{u} \rfloor (\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2) \\ &= (u^1\mathbf{f}_1 + u^2\mathbf{f}_2) \wedge (\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2) + \mathbf{u} \rfloor (\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2) = \mathbf{u} \rfloor (\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2\mathbf{u} &\overset{\text{Eq.(1.8)}}{=} (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2) \wedge \mathbf{u} + (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2) \lfloor \mathbf{u} = (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2) \wedge (u^1\mathbf{f}_1 + u^2\mathbf{f}_2) + (\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2) \lfloor \mathbf{u} \\ &= -\mathbf{u} \rfloor (\widehat{\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2}) = -\mathbf{u} \rfloor (\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\therefore \mathbf{u}\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2\mathbf{u} = 0.$$

Agora, $(\Gamma(\mathbf{u} + \mathbf{v}))^2 = (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2)^2 \otimes \mathbf{v}^2 + \mathbf{u}^2 \otimes 1$, de onde

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2)^2 &= -\mathbf{f}_1^2\mathbf{f}_2^2 = -\lambda_1\lambda_2, \quad \text{então} \\ (\Gamma(\mathbf{v} + \mathbf{u}))^2 &= -\lambda_1\lambda_2 \otimes g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + g_U(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \otimes 1 \\ &= (\pm g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + g_U(\mathbf{u}, \mathbf{u}))1 \otimes 1 \\ &= \left[\lambda_1(u^1)^2 + \lambda_2(u^2)^2 - \lambda_1\lambda_2\left[(v^1)^2 + \ldots + (v^p)^2 - (v^{p+1})^2 - \ldots - (v^n)^2\right]\right] 1 \otimes 1 \end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma\colon W \to \mathcal{C}\ell(W, g_W)$ é aplicação de Clifford, onde $W = \mathbb{R}^{p,q} \oplus U$ é espaço $(n+2)$-dimensional, e um elemento $\mathbf{w} \in W$ pode ser escrito como $\mathbf{w} = u^1\mathbf{f}_1 + u^2\mathbf{f}_2 + v^i\mathbf{e}_i$. Se $U = \mathbb{R}^{2,0}$, temos que $W = \mathbb{R}^{q+2,p}$, enquanto que se $U = \mathbb{R}^{1,1}$ temos $W = \mathbb{R}^{p+1,q+1}$. Finalmente, para $U = \mathbb{R}^{0,2}$ teremos $W = \mathbb{R}^{q,p+2}$.

Os isomorfismos seguem da universalidade da álgebra. □

Havíamos definido anteriormente as três operações básicas[1] das ACs das quais temos um automorfismo e dois anti-automorfismos. Redefinimos a notação de tais anti-automorfismos, sugerindo uma nova notação: para a **reversão**, α_1, e para a **conjugação**, α_{-1}, de modo que podemos unificar as 2 operações na notação α_ϵ, $(\epsilon = \pm 1)$ [Roc06a]. Com essa nova notação, enunciamos [Ma89] a generalização do teorema anterior:

▶ **Teorema 13:** *(Teorema de Periodicidade Generalizado) O Teorema de Periodicidade ([Ati64]) se generaliza em seus anti-automorfismos como*

$$\boxed{(\mathcal{C}\ell_{p+1,q+1}, \alpha_\epsilon) \simeq (\mathcal{C}\ell_{p,q}, \alpha_{-\epsilon}) \otimes (\mathcal{C}\ell_{1,1}, \alpha_\epsilon).}$$

◀

Demonstração: Os conjuntos $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{f}_j\}$ são geradores das álgebras $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ e $\mathcal{C}\ell_{1,1}$, respectivamente. Tome $D = \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2, 1 \otimes \mathbf{f}_j\}$ um conjunto de geradores para $\mathcal{C}\ell_{p+1,q+1} \simeq \mathcal{C}\ell_{p,q} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}$. Considere agora a aplicação $(\alpha_{-\epsilon} \otimes \alpha_\epsilon)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2) = \alpha_{-\epsilon}(\mathbf{e}_i) \otimes \alpha_\epsilon(\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2) = \epsilon(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2)$. Também $(\alpha_{-\epsilon} \otimes \alpha_\epsilon)(1 \otimes \mathbf{f}_j) = \alpha_{-\epsilon}(1) \otimes \alpha_\epsilon(\mathbf{f}_j) = \epsilon(1 \otimes \mathbf{f}_j)$. Portanto os geradores são multiplicados por ϵ, o que prova o teorema.□

▷ **Exemplo 3:** Seja $\rho\colon \mathcal{C}\ell_{3,0} \to \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ a representação obtida pelo mapa $\rho\colon \mathbf{e}_i \to \rho(\mathbf{e}_i) = \sigma_i$ dado por

$$\rho(\mathbf{e}_1) = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{e}_2) = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{e}_3) = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que são as *matrizes de Pauli.* Nesta representação um multivetor $\Psi \in \mathcal{C}\ell_{3,0}$ corresponde a matriz $\Psi = \rho(\psi)$, onde $\psi = a + a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 + a^{12}\mathbf{e}_{12} + a^{13}\mathbf{e}_{13} + a^{23}\mathbf{e}_{23} + a^{123}\mathbf{e}_{123} \in \mathcal{C}\ell_{3,0}$. Então Ψ é dado por

$$\Psi = \begin{pmatrix} (a + a^3) + i(a^{12} + a^{123}) & (a^1 - a^{13}) - i(a^2 - a^{23}) \\ (a^1 + a^{13}) + i(a^2 + a^{23}) & (a - a^3) - i(a^{12} - a^{123}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}.$$

[1] Reversão, involução graduada e conjugação.

A reversão, a involução graduada e conjugação de $\Psi \in \mathcal{C}\ell_{3,0}$ correspondem respectivamente a

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi} = \begin{pmatrix} z_4^* & -z_2^* \\ -z_3^* & z_1^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} z_4 & -z_3 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

em $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})\lhd$

Dos isomorfismos acima podemos realizar combinações para obter vários outros como segue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{p,p} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{p-1,p-1} \overset{(i)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{p-2,p-2} \overset{(i)}{\simeq} \otimes^p \mathcal{C}\ell_{1,1} \\
\mathcal{C}\ell_{p,q} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{p-1,q-1} \overset{(i)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{p-2,q-2} \overset{(i)}{\simeq} \underbrace{\mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}}_{p-\text{vezes}} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,q-p} \\
&\overset{\text{se } p<q}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{p,p} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,q-p} \\
\mathcal{C}\ell_{p,q} &\overset{\text{se } p>q}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{q,q} \otimes \mathcal{C}\ell_{p-q,0}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Alguns casos particulares de interesse são

$$\mathcal{C}\ell_{0,2} \otimes \mathcal{C}\ell_{2,0} \overset{(iii)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{0,4}, \quad \mathcal{C}\ell_{0,4} \otimes \mathcal{C}\ell_{4,0} \overset{(iii)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{0,8} \tag{2.6}$$

e

$$\mathcal{C}\ell_{2,2} \overset{(iii)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{0,2} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,2} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1} \overset{(i)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{2,2} \tag{2.7}$$

Destes isomorfismos segue ainda que

$$\mathcal{C}\ell_{0,4} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q} = \mathcal{C}\ell_{p,q+4} \qquad \mathcal{C}\ell_{0,8} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q} = \mathcal{C}\ell_{p,q+8} \tag{2.8}$$

Um isomorfismo que não segue da análise acima mas que será muito importante é

$$\mathcal{C}\ell_{2,0} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \quad (iv)$$

Podemos construir explicitamente esse isomorfismo. Os elementos de $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ são da forma $\mathcal{C}\ell_{2,0} \ni a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ com $(\mathbf{e}_1)^2 = 1$ e $(\mathbf{e}_2)^2 = 1$ e os elementos de $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ são da forma $\mathcal{C}\ell_{1,1} \ni b_0 + b_1\mathbf{f}_1 + b_2\mathbf{f}_2 + b_{12}\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2$ com $(\mathbf{f}_1)^2 = 1$ e $(\mathbf{f}_2)^2 = -1$. Defina uma aplicação linear $\phi\colon \mathcal{C}\ell_{2,0} \to \mathcal{C}\ell_{1,1}$ tal que

$$\begin{aligned}
\phi\colon \mathcal{C}\ell_{2,0} &\to \mathcal{C}\ell_{1,1} \\
1 &\mapsto \phi(1) = 1 \\
\mathbf{e}_1 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_1 \\
\mathbf{e}_2 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \\
\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{f}_2
\end{aligned}$$

Assim ϕ é um isomorfismo.

Usando o último isomorfismo encontrado, $\mathcal{C}\ell_{2,0} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}$ dado por (iv), e combinando com outros isomorfismos já mostrados podemos ver sem grandes dificuldades que

$$\mathcal{C}\ell_{p+1,q} \overset{(ii)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{2,0} \otimes \mathcal{C}\ell_{q,p-1} \overset{(iv)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{q,p-1} \overset{(i)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{q+1,p}.$$

É possível ainda escrever outras combinações dos isomorfismos acima entretanto isso já não é mais importante uma vez que ao conhecermos as álgebras de Clifford

$$\boxed{\mathcal{C}\ell_{1,0} \qquad \mathcal{C}\ell_{0,1} \qquad \mathcal{C}\ell_{0,2} \qquad \mathcal{C}\ell_{1,1} \simeq \mathcal{C}\ell_{2,0}}$$

então todas as demais serão conhecidas utilizando-se os isomorfismos acima. Desta maneira temos um método para classificar as álgebras de Clifford.

Para finalizar, apresentamos um resultado de grande importância:

▶ **Teorema 14:** *Seja $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ a álgebra de Clifford associada ao espaço quadrático $\mathbb{R}^{p,q}$ e $\mathcal{C}\ell^+_{p,q}$ a sua subálgebra par, então*

$$\boxed{\mathcal{C}\ell^+_{p,q} \simeq \mathcal{C}\ell_{q,p-1} \simeq \mathcal{C}\ell_{p,q-1} \simeq \mathcal{C}\ell^+_{q,p}}$$

◀

Demonstração: Primeiro iremos mostrar que $\mathcal{C}\ell_{q,p-1} \simeq \mathcal{C}\ell_{p,q-1}$.

$$\mathcal{C}\ell_{p,q-1} \overset{(ii)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{2,0} \otimes \mathcal{C}\ell_{q-1,p-2} \overset{(iv)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{q-1,p-2} \overset{(i)}{\simeq} \mathcal{C}\ell_{q,p-1}.$$

Em seguida mostraremos que $\mathcal{C}\ell^+_{p,q} \simeq \mathcal{C}\ell_{q,p-1}$. Sendo $\mathbb{R}^{p,q} = \{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_k\}, i = 1, \dots, p; k = 1, \dots, q$, com $\mathbf{e}_i^2 = 1, \mathbf{f}_k^2 = -1$, onde para $i \neq j, k \neq l, i \neq k$ temos

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0, \quad \mathbf{f}_k\mathbf{f}_l + \mathbf{f}_l\mathbf{f}_k = 0, \quad \mathbf{e}_i\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k\mathbf{e}_i = 0$$

$\Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q}) = \langle \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k\mathbf{f}_l, \mathbf{e}_i\mathbf{f}_k \rangle$, mas nem todos elementos são linearmente independentes e formam uma base. Temos elementos redundantes tais como

$$(\mathbf{e}_i\mathbf{f}_k)(\mathbf{e}_i\mathbf{f}_l) = -\mathbf{f}_k\mathbf{f}_l$$

Escolhendo $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^{p,q}$, temos que $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_1\mathbf{f}_k\}$ com $(m = 2, \dots, p; k = 1, \dots, q)$ gera $\Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell^+_{p,q}$

$$\begin{aligned}
&\xi_a := \mathbf{e}_1\mathbf{e}_{a+1}, \quad (a = 1, \dots, p-1)\\
&\zeta_b := \mathbf{e}_1\mathbf{f}_b, \quad (b = 1, \dots, q)\\
&\xi_a^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{a+1})^2 = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_{a+1}^2 = -1\\
&\zeta_b^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{f}_b)^2 = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{f}_b^2 = -(-1) = 1
\end{aligned}$$

onde

$$\xi_a\xi_c + \xi_c\xi_a = 0, \quad (a \neq c) \qquad \zeta_b\zeta_d + \zeta_d\zeta_b = 0, \quad (b \neq d) \qquad \xi_a\zeta_b + \zeta_b\xi_a = 0, \quad (a \neq b)$$

Portanto, $\{\zeta_b, \xi_a\}$ $(b = 1, \dots, q; a = 1, \dots, p-1)$ são geradores de uma AC associada ao espaço quadrático $\mathbb{R}^{q,p-1}$, ou seja, $\mathcal{C}\ell^+_{p,q} \simeq \mathcal{C}\ell_{q,p-1}$.□

▷ **Exemplo 4:** Neste exemplo mostraremos que a subálgebra par da *álgebra do espaço tempo de Minkowski* é isomorfa a *álgebra das matrizes de Pauli.* $\mathcal{C}\ell^+_{1,3} \simeq \mathcal{C}\ell_{3,0}$

$$\begin{array}{rcl}
\phi\colon \mathcal{C}\ell^+_{1,3} & \to & \mathcal{C}\ell_{3,0}\\
\gamma_0 & \mapsto & \phi(\gamma_0) = \gamma_0\gamma_0 = 1\\
\gamma_1 & \mapsto & \phi(\gamma_1) = \gamma_0\gamma_1 = \sigma_1\\
\gamma_2 & \mapsto & \phi(\gamma_2) = \gamma_0\gamma_2 = \sigma_2\\
\gamma_3 & \mapsto & \phi(\gamma_3) = \gamma_0\gamma_3 = \sigma_3
\end{array}$$

onde σ_1, σ_2 e σ_3 são as *matrizes de Pauli* dadas no exemplo anterior.◁

2.3 Representações

▶ **Definição 7:** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra real e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ onde $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos e $\mathbb{H}$ é um $\mathbb{H}$-módulo. Uma aplicação $\rho \colon \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ satisfazendo $\rho(1_{\mathcal{A}}) = 1_V$ e $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b),\ \forall a, b \in \mathcal{A}$, é chamada uma $\mathbb{K}$-*representação* de $\mathcal{A}$. O espaço vetorial V é chamado *espaço de representação* de $\mathcal{A}$.◀

Duas representações $\rho_1 : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_1)$ e $\rho_2 : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_2)$ são *equivalentes* se existir um $\mathbb{K}$-isomorfismo $\phi \colon V_1 \to V_2$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\rho_1(a)"] \arrow[d, "\phi"'] & \rho_1(a)x \arrow[d, "\phi"] \\ \phi(x) \arrow[r, "\rho_2(a)"] & \rho_2(a)\phi(x) = \phi(\rho_1(a)x) \end{tikzcd}$$

isto é, $\rho_2(a) = \phi \circ \rho_1(a) \circ \phi^{-1}$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

Uma representação é dita *irredutível* ou *simples* se os únicos subespaços invariantes de $\rho(a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, são V e $\{0\}$. Ela é dita *redutível* ou *semi-simples* se $V = V_1 \oplus V_2$ onde V_1 e V_2 são subespaços invariantes pela ação de $\rho(a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

▶ **Teorema 15:** *Todas as representações irredutíveis de uma álgebra simples são equivalentes.* ◀

▶ **Teorema 16:** *Representações irredutíveis de uma álgebra semi-simples são equivalentes se, e somente se, seus núcleos coincidem.* ◀

2.4 A Decomposição Algébrica de Wedderburn

A álgebra das matrizes quadradas de ordem n sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ será denotada por $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

▶ **Proposição 2:** $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ *é uma álgebra simples.* ◀

Se a álgebra real é simples, então $\mathcal{A} = \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$, onde $\mathcal{D}$ e $\mathcal{M}$ são subálgebras de $\mathcal{A}$, onde $\mathcal{D}$ é isomorfa à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ e $\mathcal{M}$ é uma álgebra de matrizes. Portanto toda álgebra simples é da forma $\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, com $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Podemos ver [Ben87] que $\mathcal{D}$ comuta com $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$, enunciamos o

▶ **Teorema 17:** *(Decomposição de Wedderburn)* $\mathcal{A} = \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$. ◀

Como as únicas álgebras de divisão sobre $\mathbb{R}$ são $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, temos finalmente a

▶ **Proposição 3:** $\mathcal{A}$ *é uma álgebra simples associativa sobre* $\mathbb{R}$ *se e somente se* $\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$*,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{H}$. ◀

O caso das álgebras simples sobre $\mathbb{C}$ segue imediatamente. Se $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ denota a álgebra $\mathcal{B}$ com os escalares restritos a $\mathbb{R}$, então $\mathcal{B} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Logo a proposição anterior nos dá $\mathcal{B} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Mas como

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{C} \qquad \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \qquad \text{e} \quad \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{M}(2, \mathbb{R}),$$

sendo $\mathcal{B}$ simples por hipótese, o segundo caso acima não pode ocorrer. De acordo com o isomorfismo $\mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(2n, \mathbb{R})$, temos a

▶ **Proposição 4:** *Se* $\mathcal{A}$ *é álgebra simples sobre* $\mathbb{C}$*, então* $\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. ◀

2.5 Álgebras de Clifford Fundamentais

Nesta Seção descreveremos e explicitaremos as quatro álgebras de Clifford, $\mathcal{C}\ell_{1,0}, \mathcal{C}\ell_{0,1}, \mathcal{C}\ell_{0,2}, \mathcal{C}\ell_{1,1} \simeq \mathcal{C}\ell_{2,0}$, que devemos conhecer para conhecermos as demais, isto é, a partir destas quatro álgebras, que chamamos de fundamentais, veremos que podemos classificar qualquer álgebra de Clifford em termos destas. Devido esta importância seguem os quatro isomorfismos:

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{C}\ell_{1,0} &\to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ 1 &\mapsto \phi(1) = (1,0) \\ \mathbf{e}_1 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1) = (0,1), \quad \mathbf{e}_1^2 = 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{0,1} \simeq \mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{C}\ell_{0,1} &\to \mathbb{C} \\ 1 &\mapsto \phi(1) = (1,0) \\ \mathbf{e}_1 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1) = (0,1) = i, \quad \mathbf{e}_1^2 = -1 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{0,2} \simeq \mathbb{H}}$

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{C}\ell_{0,2} &\to \mathbb{H} \\ 1 &\mapsto \phi(1) = 1 \\ \mathbf{e}_1 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1) = i \\ \mathbf{e}_2 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_2) = j \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = k, \quad \mathbf{e}_1^2 = -1 = \mathbf{e}_2^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{2,0} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R})}$

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{C}\ell_{2,0} &\to \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \\ 1 &\mapsto \phi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_1 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▶ **Obs.2:** Os números da forma $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ são conhecidos como *duplexos*, *números perplexos*, *números hiperbólicos* ou ainda *números de Study* [Kel94, RV06b, Fje86] e apresentam algumas aplicações interessantes na Física, por exemplo na teoria da relatividade.◀

Embora tenhamos utilizado ϕ para todos os isomorfismos, eles são diferentes entre si.

2.6 Classificação das Álgebras de Clifford

Com os isomorfismos estabelecidos $\mathcal{C}\ell_{0,1} \simeq \mathbb{C}$, $\mathcal{C}\ell_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathcal{C}\ell_{0,2} \simeq \mathbb{H}$ e $\mathcal{C}\ell_{2,0} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ e os resultados já obtidos daremos seguimento à classificação das álgebras de Clifford [Vaz05, Por69, Por95, Lou94, Lou02, Ben87, Sny97]. Das propriedades do produto tensorial temos que

$$\mathcal{M}(m,\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(mn,\mathbb{R})$$

donde, considerando $\mathcal{C}\ell_{p,p} \simeq \otimes^p \mathcal{C}\ell_{1,1}$, obtem-se

$$\mathcal{C}\ell_{p,p} \simeq \mathcal{M}(2p,\mathbb{R})$$

Agora, com a Eq.(2.7) onde $\mathcal{C}\ell_{2,2} \simeq \mathcal{C}\ell_{0,2} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,2} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,1}$ conclui-se

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(4,\mathbb{R})$$

Seguindo essa linha de raciocínio munido dos resultados contidos na Eq.(2.6) obtemos que

$$\mathcal{C}\ell_{0,4} \simeq \mathcal{C}\ell_{0,2} \otimes \mathcal{C}\ell_{2,0} \simeq \mathbb{H} \otimes \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H}) \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \simeq \mathcal{C}\ell_{2,0} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,2} \simeq \mathcal{C}\ell_{4,0}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\ell_{0,8} &\simeq \mathcal{C}\ell_{0,4}\otimes\mathcal{C}\ell_{4,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{H})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{H})\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\\ &\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(4,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(16,\mathbb{R})\end{aligned}\tag{2.9}$$

que por sua vez na Eq.(2.8) implica que

$$\boxed{\mathcal{C}\ell_{p,q+8}\simeq\mathcal{C}\ell_{p,q}\otimes\mathcal{M}(16,\mathbb{R})}$$

Isso significa que só precisamos estabelecer explicitamente a classificação das álgebras de Clifford até $\dim V = p+q = 8$ uma vez que para dimensões maiores podemos usar o isomorfismo $\mathcal{C}\ell_{p,q+8}\simeq\mathcal{C}\ell_{p,q}\otimes\mathcal{M}(16,\mathbb{R})$.

Fazendo uso do *Teorema de Periodicidade* e dos isomorfismos estudados, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{0,0} &\simeq \mathbb{R}\\
\\
\mathcal{C}\ell_{0,1} &\simeq \mathbb{C}\\
\mathcal{C}\ell_{1,0} &\simeq \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\\
\\
\mathcal{C}\ell_{0,2} &\simeq \mathbb{H}\\
\mathcal{C}\ell_{2,0} &\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{1,1} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\\
\\
\mathcal{C}\ell_{0,3} &\simeq \mathbb{H}\oplus\mathbb{H}\\
\mathcal{C}\ell_{3,0} &\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{1,2} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,1}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{2,1} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\\
\\
\mathcal{C}\ell_{0,4} &\simeq \mathcal{C}\ell_{0,2}\otimes\mathcal{C}\ell_{2,0}\simeq\mathbb{H}\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{4,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,2}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{H}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{1,3} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,2}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{H}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{3,1} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{2,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{2,2} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{5,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,3}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{0,5} &\simeq \mathcal{C}\ell_{0,2}\otimes\mathcal{C}\ell_{3,0}\simeq\mathbb{H}\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{C})\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{C}\otimes\mathbb{H})\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathcal{C}\ell_{3,0})\simeq\begin{pmatrix}\mathcal{C}\ell_{3,0} & \mathcal{C}\ell_{3,0}\\ \mathcal{C}\ell_{3,0} & \mathcal{C}\ell_{3,0}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\mathcal{M}(2,\mathbb{C}) & \mathcal{M}(2,\mathbb{C})\\ \mathcal{M}(2,\mathbb{C}) & \mathcal{M}(2,\mathbb{C})\end{pmatrix}\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{4,1} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{3,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{C})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{C}),\quad\text{ou então}\\
\mathcal{C}\ell_{4,1} &\simeq \mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,3}\simeq\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell_{3,1}\simeq\mathbb{C}\otimes\mathcal{M}(4,\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{1,4} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,3}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes(\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{3,2} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{2,3} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,1}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{C})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{6,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,4}\simeq\mathcal{C}\ell_{2,0}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,4}\simeq\mathcal{C}\ell_{2,0}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,2}\otimes\mathcal{C}\ell_{2,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{H}\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{0,6} &\simeq \mathcal{C}\ell_{0,2}\otimes\mathcal{C}\ell_{4,0}\simeq\mathcal{C}\ell_{0,2}\otimes\mathcal{C}\ell_{2,0}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,2}\simeq\mathbb{H}\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{H}\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H})\otimes\mathbb{H}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{H}\otimes\mathbb{H})\simeq\mathcal{M}(2,\mathcal{C}\ell_{0,2}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,2})\simeq\mathcal{M}(2,\mathcal{C}\ell_{2,2})\\
&\simeq \begin{pmatrix}\mathcal{C}\ell_{2,2} & \mathcal{C}\ell_{2,2}\\ \mathcal{C}\ell_{2,2} & \mathcal{C}\ell_{2,2}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\mathcal{M}(4,\mathbb{R}) & \mathcal{M}(4,\mathbb{R})\\ \mathcal{M}(4,\mathbb{R}) & \mathcal{M}(4,\mathbb{R})\end{pmatrix}\simeq\mathcal{M}(8,\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{5,1} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{4,0}\simeq\in,\mathbb{R}\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{H})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{1,5} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,4}\simeq\in,\mathbb{R}\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{H})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{4,2} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{2,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(8,\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{2,4} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,2}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{H}\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{3,3} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(8,\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{7,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,5}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(4,\mathbb{C})\otimes\mathcal{M}(8,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{0,7} &\simeq \mathcal{C}\ell_{0,2}\otimes\mathcal{C}\ell_{5,0}\simeq\mathbb{H}\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})\simeq\mathcal{M}(2,(\mathbb{H}\otimes\mathbb{H})\oplus(\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}))\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H}\otimes\mathbb{H})\oplus\mathcal{M}(2,\mathbb{H}\otimes\mathbb{H})\simeq\begin{pmatrix}\mathcal{M}(4,\mathbb{R}) & \mathcal{M}(4,\mathbb{R})\\ \mathcal{M}(4,\mathbb{R}) & \mathcal{M}(4,\mathbb{R})\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\mathcal{M}(4,\mathbb{R}) & \mathcal{M}(4,\mathbb{R})\\ \mathcal{M}(4,\mathbb{R}) & \mathcal{M}(4,\mathbb{R})\end{pmatrix}\\
&\simeq \mathcal{M}(8,\mathbb{R})\oplus\mathcal{M}(8,\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(8,\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{6,1} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{5,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{1,6} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,5}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(4,\mathbb{C})\simeq\mathcal{M}(8,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{5,2} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{3,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{C})\simeq\mathcal{M}(8,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{2,5} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,3}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes(\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})\simeq\mathcal{M}(4,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{4,3} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,0}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\simeq\mathcal{M}(8,\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{3,4} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{1,1}\otimes\mathcal{C}\ell_{0,1}\simeq\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}\simeq\mathcal{M}(8,\mathbb{C})
\end{aligned}
$$

Donde temos os isomorfismos abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{2,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{3,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,2} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{0,4} &\simeq \mathcal{C}\ell_{4,0} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,3} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{3,1} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,2} \simeq \mathcal{M}(4,\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{5,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,4} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{0,5} &\simeq \mathcal{C}\ell_{4,1} \simeq \mathcal{C}\ell_{2,3} \simeq \mathcal{M}(4,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{6,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{5,1} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,5} \simeq \mathcal{C}\ell_{2,4} \simeq \mathcal{M}(4,\mathbb{H})\\
\mathcal{C}\ell_{0,6} &\simeq \mathcal{C}\ell_{4,2} \simeq \mathcal{C}\ell_{3,3} \simeq \mathcal{M}(8,\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{7,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{1,6} \simeq \mathcal{C}\ell_{5,2} \simeq \mathcal{C}\ell_{3,4} \simeq \mathcal{M}(8,\mathbb{C})\\
\mathcal{C}\ell_{0,7} &\simeq \mathcal{C}\ell_{4,3} \simeq \mathcal{M}(8,\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\\
\mathcal{C}\ell_{6,1} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,5} \simeq \mathcal{M}(4,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})
\end{aligned}$$

Fazendo a diferença $p-q$ resulta

$$\begin{aligned}
p-q &= 0, \quad \mathcal{C}\ell_{0,0}, \quad \mathcal{C}\ell_{1,1}, \quad \mathcal{C}\ell_{2,2}, \quad \mathcal{C}\ell_{3,3}\\
p-q &= 1, \quad \mathcal{C}\ell_{1,0}, \quad \mathcal{C}\ell_{2,1}, \quad \mathcal{C}\ell_{3,2}, \quad \mathcal{C}\ell_{4,3}, \quad \mathcal{C}\ell_{0,7}\\
p-q &= 2, \quad \mathcal{C}\ell_{2,0}, \quad \mathcal{C}\ell_{3,1}, \quad \mathcal{C}\ell_{4,2}, \quad \mathcal{C}\ell_{0,6}\\
p-q &= 3, \quad \mathcal{C}\ell_{3,0}, \quad \mathcal{C}\ell_{4,1}, \quad \mathcal{C}\ell_{5,2}, \quad \mathcal{C}\ell_{0,5}, \quad \mathcal{C}\ell_{1,6}\\
p-q &= 4, \quad \mathcal{C}\ell_{4,0}, \quad \mathcal{C}\ell_{5,1}, \quad \mathcal{C}\ell_{0,4}, \quad \mathcal{C}\ell_{1,5}\\
p-q &= 5, \quad \mathcal{C}\ell_{5,0}, \quad \mathcal{C}\ell_{6,1}, \quad \mathcal{C}\ell_{0,3}, \quad \mathcal{C}\ell_{1,4}, \quad \mathcal{C}\ell_{2,5}\\
p-q &= 6, \quad \mathcal{C}\ell_{6,0}, \quad \mathcal{C}\ell_{0,2}, \quad \mathcal{C}\ell_{1,3}, \quad \mathcal{C}\ell_{2,4}\\
p-q &= 7, \quad \mathcal{C}\ell_{7,0}, \quad \mathcal{C}\ell_{0,1}, \quad \mathcal{C}\ell_{1,2}, \quad \mathcal{C}\ell_{2,3}, \quad \mathcal{C}\ell_{3,4}
\end{aligned}$$

$p-q$ mod 8	0	1	2	3
$\mathcal{C}\ell_{p,q}$	$\mathbb{R}$, $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ $\mathcal{M}(4,\mathbb{R})$ $\mathcal{M}(8,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, $\mathcal{M}(2,\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})$ $\mathcal{M}(4,\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})$ $\mathcal{M}(8,\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})$	$\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ $\mathcal{M}(4,\mathbb{R})$ $\mathcal{M}(8,\mathbb{R})$	$\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ $\mathcal{M}(4,\mathbb{C})$ $\mathcal{M}(8,\mathbb{C})$
$p-q$ mod 8	4	5	6	7
$\mathcal{C}\ell_{p,q}$	$\mathcal{M}(2,\mathbb{H})$ $\mathcal{M}(4,\mathbb{H})$	$\mathcal{M}(2,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})$ $\mathcal{M}(4,\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})$ $\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathcal{M}(4,\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$ $\mathcal{M}(2,\mathbb{H})$	$\mathcal{M}(8,\mathbb{C})$, $\mathbb{C}$ $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ $\mathcal{M}(4,\mathbb{C})$

Dos isomorfismos estudados segue a tabela de classificação das álgebras de Clifford [Vaz05, Roc02, Roc06a]. Por exemplo, para $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ temos $p-q=-3=5 \mod 8$, $[3/2]-1=0$, portanto $\mathcal{C}\ell_{0,3}\simeq\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$.

Para o caso complexo a classificação pode ser obtida a partir de $\mathcal{C}\ell(V_{\mathbb{C}},g_{\mathbb{C}})\simeq\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell(V,g)$. A álgebra de Clifford complexa depende apenas da paridade de n. Denotaremos portanto $\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell_{p,q}=\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(n)$, onde

$p-q \mod 8$	0	1	2	3
$\mathcal{C}\ell_{p,q}$	$\mathcal{M}(2^{[n/2]},\mathbb{R})$	$\mathcal{M}(2^{[n/2]},\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}(2^{[n/2]},\mathbb{R})$	$\mathcal{M}(2^{[n/2]},\mathbb{R})$	$\mathcal{M}(2^{[n/2]},\mathbb{C})$
$p-q \mod 8$	4	5	6	7
$\mathcal{C}\ell_{p,q}$	$\mathcal{M}(2^{[n/2]-1},\mathbb{H})$	$\mathcal{M}(2^{[n/2]-1},\mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2^{[n/2]-1},\mathbb{H})$	$\mathcal{M}(2^{[n/2]-1},\mathbb{H})$	$\mathcal{M}(2^{[n/2]},\mathbb{C})$

Tabela 1: Classificação das álgebras de Clifford reais, onde $p+q=n$ e $[n/2]$ denota a parte inteira de $n/2$

$n = p+q$. Se n é par, $p-q = 0,2,4,6$

$$\left.\begin{array}{rcl} p-q &=& 0, \quad \mathbb{C}\otimes\mathcal{M}(2^n,\mathbb{R}) = \mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) \\ p-q &=& 2, \quad \mathbb{C}\otimes\mathcal{M}(2^n,\mathbb{R}) = \mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) \\ p-q &=& 4, \quad \mathbb{C}\otimes\mathcal{M}(2^{n-1},\mathbb{H}) = \mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) \\ p-q &=& 6, \quad \mathbb{C}\otimes\mathcal{M}(2^{n-1},\mathbb{H}) = \mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) \end{array}\right\} \mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell(2k)$$

Se n é ímpar, $p-q = 1,3,5,7$

$$\left.\begin{array}{rcl} p-q &=& 1, \quad \mathbb{C}\otimes(\mathcal{M}(2^n,\mathbb{R})\oplus\mathcal{M}(2^n,\mathbb{R})) = \mathcal{M}(2^n,\mathbb{C})\oplus\mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) \\ p-q &=& 3, \quad \mathbb{C}\otimes\mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) = \mathcal{M}(2^n,\mathbb{C})\oplus\mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) \\ p-q &=& 5, \quad \mathbb{C}\otimes(\mathcal{M}(2^{n-1},\mathbb{H})\oplus\mathcal{M}(2^{n-1},\mathbb{H})) = \mathcal{M}(2^n,\mathbb{C})\oplus\mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) \\ p-q &=& 7, \quad \mathbb{C}\otimes\mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) = \mathcal{M}(2^n,\mathbb{C})\oplus\mathcal{M}(2^n,\mathbb{C}) \end{array}\right\} \mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell(2k+1)$$

Assim, chegamos a conclusão de que

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell(2k) = \mathcal{M}(2^k,\mathbb{C}) \\ \mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell(2k+1) = \mathcal{M}(2^k,\mathbb{C})\oplus\mathcal{M}(2^k,\mathbb{C}) \end{array}}$$

► **Obs.3:** Note que falando em representações não há necessidade de se considerar os octonions porque os octonions não têm representações matriciais pelo fato da não-associatividade, veja Proposição 3.◄

A respeito de curiosidade construíremos explicitamente o isomorfismo entre algumas ACs de dimensão pequena e a representação algébrica correspondente na álgebra das matrizes.

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{0,3} \simeq \mathbb{H}\oplus\mathbb{H}}$

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon \mathcal{C}\ell_{0,3} &\to& \mathbb{H}\oplus\mathbb{H} \\ 1 &\mapsto& \phi(1) = (1,1) \\ \mathbf{e}_1 &\mapsto& \phi(\mathbf{e}_1) = (i,-i) \\ \mathbf{e}_2 &\mapsto& \phi(\mathbf{e}_2) = (j,-j) \\ \mathbf{e}_3 &\mapsto& \phi(\mathbf{e}_3) = (k,-k) \end{array}$$

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{3,0} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{C})}$

$$
\begin{aligned}
\phi\colon \mathcal{C}\ell_{3,0} &\to \mathcal{M}(2,\mathbb{C})\\
1 &\mapsto \phi(1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_1 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1) = \sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_2 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_2) = \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_3 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_3) = \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{4,0} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H})}$

$$
\begin{aligned}
\phi\colon \mathcal{C}\ell_{4,0} &\to \mathcal{M}(2,\mathbb{H})\\
1 &\mapsto \phi(1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_1 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_2 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}0 & -j\\ j & 0\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_3 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix}0 & -k\\ k & 0\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_4 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{5,0} \simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2,\mathbb{H})}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{5,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,3}\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H}) \otimes (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2,\mathbb{H})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi\colon \mathcal{C}\ell_{5,0} &\to \mathcal{M}(2,\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})\\
1 &\mapsto \phi(1) = \begin{pmatrix}(1,1) & (0,0)\\ (0,0) & (1,1)\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_1 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix}(0,0) & (i,-i)\\ (-i,i) & (0,0)\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_2 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}(0,0) & (j,-j)\\ (-j,j) & (0,0)\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_3 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix}(0,0) & (k,-k)\\ (-k,k) & (0,0)\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_4 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix}(1,-1) & (0,0)\\ (0,0) & (1,-1)\end{pmatrix}\\
\mathbf{e}_5 &\mapsto \phi(\mathbf{e}_5) = \begin{pmatrix}(0,0) & (1,-1)\\ (-1,1) & (0,0)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{6,0} \simeq \mathcal{M}(4,\mathbb{H})}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{6,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,4}\\
&\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,2} \otimes \mathcal{C}\ell_{2,0}\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H}\mathcal{M}(2,\mathbb{R})\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(2,\mathbb{H})\\
&\simeq \mathcal{M}(4,\mathbb{H})
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathcal{C}\ell_{7,0} \simeq \mathcal{M}(8,\mathbb{C})}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{7,0} &\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,5}\\
&\simeq \mathcal{C}\ell_{2,0} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,2} \otimes \mathcal{C}\ell_{3,0}\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathcal{M}(2,\mathbb{C})\\
&\simeq \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(4,\mathbb{C})\\
&\simeq \mathcal{M}(8,\mathbb{C})
\end{aligned}
$$

2.7 Considerações a Respeito do Elemento Inverso na Álgebra de Clifford

Em se tratando de álgebra de Clifford, dado um elemento, a busca e garantia de haver um elemento inverso para este elemento não é uma tarefa fácil na maioria das vezes. Vejamos um caso onde com certeza não encontraremos inversos.

▶ **Lema 3:** *Sejam $A, B \in \mathcal{C}\ell_{n,0}$, $A \neq 0$ e $B \neq 0$, satisfazenddo a equação $AB = 0$. Então nem A tampouco B possui inverso, então existe $X \in \mathcal{C}\ell_{n,0}$ não nulo tal que $AX = 0$ ou $XA = 0$.* ◀

Demonstração: Suponha que A tenha um inverso denotado por A^{-1}. Então

$$AB = 0 \Leftrightarrow A^{-1}AB = 0 \Leftrightarrow E_1 B = 0 \Leftrightarrow B = 0,$$

onde E_1 denota o elemento identidade de $\mathcal{C}\ell_{n,0}$. Isso contradiz a hipótese de que $B \neq 0$. Portanto, A não possui inverso à esquerda. Além disso, se dois elementos $X, Y \in \mathcal{C}\ell_{n,0}$ satisfazem $XY = 1$, então todos os seus componentes devem anticomutar mutuamente. Esta anticomutatividade é independente de escrevermos XY ou YX. Portanto, esta claro que todo inverso à esquerda é também um inverso à direita e vice e versa.

Assim, A não possui elemento inverso à esquerda nem à adireita em $\mathcal{C}\ell_{n,0}$. Segue também que se A não possui inverso, a equação $AB = 0$ somente é satisfeita se $B = 0$. Analogamente para B.□

Vejamos algumas contas e observações feitas por Lounesto e também dois exemplos simples mas que no quesito elemento inverso não são tão simples assim.

Um dos fatos que podemos observar é que nem sempre $u\bar{u} = \bar{u}u$ [Lou03]. Por exemplo, considere a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{3,1} \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ do espaço tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. Tome o elemento

$$u = (1 + \mathbf{e}_1)(1 + \mathbf{e}_{234}) = 1 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{234} + \mathbf{e}_{1234}$$

que tem como conjugado de Clifford

$$\bar{u} = (1 - \mathbf{e}_{432})(1 - \mathbf{e}_1) = 1 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{432} + \mathbf{e}_{4321}$$

Calculando os produtos entre u e $\bar{u}$ têm-se

$$\begin{aligned} u\bar{u} &= 4(\mathbf{e}_{234} + \mathbf{e}_{1234}) \\ \bar{u}u &= 0 \end{aligned}$$

Nas álgebras de Clifford de dimensão finita podemos definir a norma de uma maneira natural

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \sqrt{\langle u\tilde{u}\rangle_0} \quad \text{para todo } u \in \mathcal{C}\ell_{n,0} \\ \|u\|_2 &= \sqrt{\langle u\bar{u}\rangle_0} \quad \text{para todo } u \in \mathcal{C}\ell_{0,n} \end{aligned}$$

Note que não podemos tomar $\sqrt{\langle u\bar{u}\rangle_0}$ como norma para $u \in \mathcal{C}\ell_{n,0}$ nem $\sqrt{\langle u\tilde{u}\rangle_0}$ para norma de $u \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$. Basta observar que $\langle u\bar{u}\rangle_0$ e $\langle u\tilde{u}\rangle_0$ são valores reais negativos para $u \in \mathcal{C}\ell_{n,0}$ e $u \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ respectivamente.

Em $\mathcal{C}\ell_{0,2} \simeq \mathbb{H}$ temos o conjugado $\bar{q} = w - ix - jy - kz$ para $q = w + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$. A norma de q é dada por $|q| = \sqrt{q\bar{q}}$ e o inverso é $q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}$. Entretanto, nem sempre é possível calcularmos ou encontrarmos uma expressão para o inverso em termos de um automorfismo ou anti-automorfismo de um elemento qualquer de uma AC.

▷ **Exemplo 5:** Tome $u = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$. Fazendo $u\tilde{u}$ e $u\bar{u}$ vem:

$$\begin{aligned} u\tilde{u} &= (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = -1 + \mathbf{e}_2^2\mathbf{e}_3^2 = 0 \\ u\bar{u} &= (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = 2 + 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \neq 0 \end{aligned}$$

Como $u\tilde{u} = 0$ e $u\bar{u} \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ não temos um elemento inverso para $u = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ em função de um automorfismo ou anti-automorfismo. Alguns casos muito particulares em $\mathcal{C}\ell_{0,4}, \mathcal{C}\ell_{0,5}, \mathcal{C}\ell_{0,6}$ e $\mathcal{C}\ell_{0,8}$ são tratados em [Lou93].◁

▷ **Exemplo 6:** Como calcular o inverso de $u = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$?

(i) Se $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_7)(\overline{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_7}) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ então $u^{-1} = \dfrac{\bar{u}}{u\bar{u}}$.

(ii) Se $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_7)(\widetilde{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_7}) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ então $u^{-1} = \dfrac{\tilde{u}}{u\tilde{u}}$.

(iii) Caso contrário podemos verificar se existem α e β reais tais que $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_7)(\alpha\mathbf{e}_1 - \beta\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7) = 1$.

Entretanto, fazendo as contas encontramos

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{e}_1^2 - \beta\mathbf{e}_1\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 - \alpha\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 &= 1\\ (-\alpha-\beta) + (-\alpha-\beta)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 &= 1,\end{aligned}$$

isto é, devemos ter

$$-\alpha - \beta = 1 \quad \text{e} \quad -\alpha - \beta \;=\; 0$$

o que é impossível. Portanto $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ não possui inverso em termos de um automorfismo ou anti-automorfismo de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$.$\lhd$

Pelos motivos aqui apresentados, na Seção 3.2 do próximo capítulo, o produto-X entre octonions assim como suas generalizações precisa de certo cuidado porque o elemento inverso é levado em conta. Assim, a única maneira que encontramos de evitar problemas maiores foi fazer uso de elementos simples e homogêneos da álgebra de Clifford, ver **Obs.1** e **Obs.5** à frente.

3 Estruturas Não-Associativas Generalizadas em S^7

Este capítulo, em particular o Teorema 19, tem o intuito de ser um laboratório para sondar as propriedades algébricas não-associativas dos fibrados exterior[1] e de Clifford sobre S^7. Os resultados preliminares originais apresentados neste capítulo nos revelarão o caminho a ser seguido a partir do Capítulo 4 desta dissertação.

3.1 Octonions

Na álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ a álgebra dos octonions $\mathbb{O}$ pode ser definida como o espaço dos paravetores $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ [Bay95b] munido com o produto $\circ\colon (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \times (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$, denominado produto octonionico padrão. A identidade $\mathbf{e}_0 = 1$ e uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^7$, no espaço dos paravetores $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ subjacente a $\mathbb{O}$, geram os octonions [Bae01, Ree90, Iva93]. O produto octonionico pode ser construído usando-se a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,7}$, fazendo

$$\boxed{A \circ B = \langle AB(1-v)\rangle_{0\oplus 1} \quad \text{para } A, B \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}} \tag{3.1}$$

onde $v = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5\mathbf{e}_6\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_7\mathbf{e}_1\mathbf{e}_5 \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$, e a justaposição denota o produto de Clifford [Lou01]. A idéia de introduzir o produto octonionico a partir do produto de Clifford neste contexto é, de agora em diante, apresentar o formalismo somente usando álgebras de Clifford e as generalizações subsequentes para o fibrado exterior e de Clifford em S^7. De fato, como $\mathbb{O}$ é isomorfo a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ enquanto espaço vetorial, o produto octonionico toma dois elementos arbitrários do espaço dos paravetores $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ — que está munido com o produto octonionico — resultando em outro elemento do espaço dos paravetores. Mas olhando para os octonions dentro da arena da álgebra de Clifford podemos ir além do espaço dos paravetores e explorar toda a álgebra exterior subjacente à álgebra de Clifford, que será o modo que usaremos para generalizar os produtos X e XY.

A álgebra exterior $\Lambda_k(\mathbb{R}^7)$ é denotada por $\Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, como em [RV06a], para enfatizar o caráter do formalismo octonionico subjacente. É bem sabido que a álgebra exterior é construída sobre um espaço vetorial sem relação com uma estrutura métrica, e a notação $\Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$ parecerá *a priori* descabida, mas queremos enfatizar o fato de o espaço vetorial subjacente estar relacionado com $\mathbb{R}^7$ munido com a métrica g de assinatura -7, ou seja, $\mathbb{R}^7$ está munido da métrica $\mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$.

Numa analogia bem próxima, o produto octonionico também pode ser expresso em termos da álgebra de Clifford sobre o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{8,0}$, de acordo com [Lou01], em termos da base $\{e_1, \ldots, e_8\}$ de $\mathbb{R}^{8,0}$.

[1] Entendemos por fibrado a união dos espaços tangentes a esfera S^7, onde a álgebra exterior é construída sobre esse espaço tangente em um ponto $X \in S^7$ arbitrário. Expressamos o fibrado exterior como $\bigcup_{X\in S^7} \Lambda(T_X^* S^7)$.

Em $\mathcal{C}\ell_{8,0}$ os octonions são representados por vetores. Como $\mathbb{R}^{8,0}$ não possui uma identidade propriamente dita escolhemos o vetor unitário e_8 em $\mathbb{R}^{8,0}$ como identidade dos octonions[2]. O produto octonionico é então expresso em termos do produto de Clifford por

$$\boxed{A \circ B = \langle A e_8 B(1+w)(1-e_{12\ldots8})\rangle_1 \quad \text{para } A, B \in \mathbb{R}^{8,0}} \tag{3.2}$$

onde $\frac{1}{8}(1+w)\frac{1}{2}(1-e_{12\ldots8})$ é um idempotente, $w = ve_{12\ldots7}^{-1} \in \Lambda_4(\mathbb{R}^{8,0})$, $e_{12\ldots7}^{-1} = -e_{12\ldots7}$ e $v = e_1e_2e_6 + e_2e_3e_7 + e_3e_4e_1 + e_4e_5e_2 + e_5e_6e_3 + e_6e_7e_4 + e_7e_1e_5 \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{8,0})$. Veja que o vetor unitário e_8 que apareceu na equação acima é exatamente o vetor que escolhemos para ser a identidade dos octonions, i.e., depende da escolha.

Mostraremos com um exemplo como se comportam as duas maneiras de efetuar o produto octonionico em álgebras de Clifford.

▷ **Exemplo 7:** Vamos calcular $\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_6$, i.e., $A = \mathbf{e}_1$ e $B = \mathbf{e}_6$ para $A, B \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_6 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_6(1-v)\rangle_{0\oplus1} \\
&= \langle \mathbf{e}_{16}(1-\mathbf{e}_{126}-\mathbf{e}_{237}-\mathbf{e}_{341}-\mathbf{e}_{452}-\mathbf{e}_{563}-\mathbf{e}_{674}-\mathbf{e}_{715})\rangle_{0\oplus1} \\
&= \langle \mathbf{e}_{16}-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_{12367}-\mathbf{e}_{346}+\mathbf{e}_{12456}+\mathbf{e}_{135}-\mathbf{e}_{147}+\mathbf{e}_{567}\rangle_{0\oplus1} \\
&= -\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

e pela segunda maneira temos $A = e_1$ e $B = e_6$ para $A, B \in \mathbb{R}^{8,0}$, portanto $e_1^2 = e_6^2 = 1$. Assim

$$\begin{aligned}
& e_1 \circ e_6 \\
= \; & \langle e_1e_8e_6(1+w)(1-e_{12\ldots8})\rangle_1 \\
= \; & \langle e_{186}(1+(e_{126}+e_{237}+e_{341}+e_{452}+e_{563}+e_{674}+e_{715})(-e_{12\ldots7}))(1-e_{12\ldots8})\rangle_1 \\
= \; & \langle e_{186}(1-e_{3457}+e_{1456}+e_{2567}-e_{1367}+e_{1247}-e_{1235}-e_{2346})(1-e_{12\ldots8})\rangle_1 \\
= \; & \langle e_{186}(1-e_{3457}+e_{1456}+e_{2567}-e_{1367}+e_{1247}-e_{1235}-e_{2346}-e_{12345678}-e_{1268}-e_{2378}-e_{1348}-e_{2458} \\
& -e_{3568}-e_{4678}-e_{1578})\rangle_1 \\
= \; & \langle e_{186}-e_{1345678}+e_{458}-e_{12578}+e_{378}+e_{24678}+e_{23568}-e_{12348}+e_{23457}-e_2-e_{12367}+e_{346}+e_{12456} \\
& -e_{135}+e_{147}-e_{567}\rangle_1 \\
= \; & -e_2
\end{aligned}$$

◁

Ambas abordagens para o produto octonionico são equivalentes ao considerarmos o seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\ell_{8,0}^{+} &\rightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7} \\
e_8 &\mapsto e_8e_8 = 1 = \mathbf{e}_0 \\
e_\sigma &\mapsto e_\sigma e_8 = \mathbf{e}_\sigma \quad \text{para } \sigma = 1, 2, \ldots, 7
\end{aligned}$$

onde $e_8e_8 = 1 = \mathbf{e}_0$ denota a unidade octonionica em $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$. De fato, $\mathbf{e}_\sigma^2 = (e_\sigma e_8)^2 = -e_\sigma e_\sigma e_8 e_8 = -1$.

Desta forma, a unidade octonionica em $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ corresponde ao vetor $e_8 \in \mathbb{R}^{8,0}$. Pelo isomorfismo apresentado bivetores em $\mathcal{C}\ell_{8,0}$ correspondem a paravetores de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$. Esse isomorfismo é um caso particular do Teorema 14 exibido na Seção 2.2.

A partir de uma base ortogonal dos octonions imaginários (puros) 7-dimensional $\mathbf{e}_a$, $a = 1, 2, \ldots, 7$ e $\mathbf{e}_0 = 1$ como sendo a identidade existem 7! permutações dos índices dos octonions puro onde cada uma

[2]Note que poderíamos ter escolhido qualquer outro vetor unitário da base de $\mathbb{R}^{8,0}$ como identidade dos octonions. Optamos por e_8 por fidelidade as notações em [Lou01].

dá origem a uma cópia modificada de $\mathbb{O}$ (a álgebra de divisão real dos octonions) com uma tabela de multiplicação. Dixon, em seu trabalho [Dix94b], mostra que existem apenas 480 tabelas de multiplicação para os quais

$$\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b = \pm\mathbf{e}_c \tag{3.3}$$

para todo $a, b \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ e algum c que depende de a e b. De todas as 480 cópias distintas de $\mathbb{O}$, Dixon destaca quatro por sua elegância e simetria. As quatro cópias surgem de uma matriz e a partir desta ele define quatro operações que para $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ satisfazem as seguintes propriedades:

$$\boxed{\text{se } \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b = \pm\mathbf{e}_c \text{ então } \mathbf{e}_{a+1}\mathbf{e}_{b+1} = \pm\mathbf{e}_{c+1}} \tag{3.4}$$

e

$$\boxed{\text{se } \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b = \pm\mathbf{e}_c \text{ então } \mathbf{e}_{2a}\mathbf{e}_{2b} = \pm\mathbf{e}_{2c}} \tag{3.5}$$

onde os índices em (3.4) e (3.5) são entendidos como ciclos de 1 a 7 modulo 7.

Além disso, as quatro cópias satisfazem leis mais gerais que são válidas para todas as 480 renumerações de $\mathbf{e}_a$

$$\boxed{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b = \pm\mathbf{e}_c \Longrightarrow \mathbf{e}_c\mathbf{e}_a = \pm\mathbf{e}_b} \tag{3.6}$$

isto é, $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\}$ são triplas quaternionicas, e

$$\boxed{\mathbf{e}_a^2 = -1} \tag{3.7}$$

onde $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

Com essas leis de multiplicação $(3.4 - 3.7)$ Dixon determina as tabelas de multiplicação dos octonions a partir das quatro regras de produto por ele definidas. São elas:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{O}^{+5} : \mathbf{e}_a\mathbf{e}_{a+1} = \mathbf{e}_{a+5}; \\ \mathbb{O}^{-5} : \mathbf{e}_a\mathbf{e}_{a+1} = -\mathbf{e}_{a+5}; \\ \mathbb{O}^{+3} : \mathbf{e}_a\mathbf{e}_{a+1} = \mathbf{e}_{a+3}; \\ \mathbb{O}^{-3} : \mathbf{e}_a\mathbf{e}_{a+1} = -\mathbf{e}_{a+3}. \end{array}}$$

Neste trabalho escolhemos então a convenção de Dixon $\mathbb{O}^{+5}$ cuja tabela multiplicativa é dada pela Tabela 3.1.

As regras usuais entre elementos da base dos octonions sob o produto octonionico são verificadas quando ambas Eqs.(3.1) e (3.2) são utilizadas. A fim de economizar cálculos utilizaremos a partir de agora a definição na Eq.(3.1) que tem $\mathbb{R}^7$ como espaço vetorial subjacente, porque ao escolher a Eq.(3.2) com $\mathbb{R}^8$ sendo o espaço vetorial subjacente teríamos o dobro de elementos a considerar em comparação com a Eq.(3.1). A multiplicação dos octonions, e em particular no contexto da Eq.(3.1), satisfaz

$$\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{ab}^c\mathbf{e}_c \tag{3.8}$$

para $a, b, c = 1, 2, \ldots, 7$ onde $\epsilon_{ab}^c = 1$ para as permutações cíclicas (ou triplas quaternionicas)

$$(abc) = (126), (237), (341), (452), (563), (674), (715) \tag{3.9}$$

Algumas identidades importantes seguem da Eq.(3.8):

$$\epsilon_{abc}\epsilon_{dcf} + \epsilon_{dbc}\epsilon_{acf} = \delta_{ab}\delta_{df} + \delta_{af}\delta_{db} - 2\delta_{ad}\delta_{bf}$$

1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_6$	-1	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_2$	-1	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_4$	-1

Tabela 3.1: O produto octonionico entre unidades da base na convenção $\mathbb{O}^{+5}$.

e quando um análogo da fórmula de Jacobi é computado tem-se

$$[\mathbf{e}_i,[\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k]]+[\mathbf{e}_j,[\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i]]+[\mathbf{e}_k,[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j]] = 4(\epsilon_{jkm}\epsilon_{imn}+\epsilon_{kim}\epsilon_{jmn}+\epsilon_{ijm}\epsilon_{kmn})\mathbf{e}_n = 3\epsilon_{ijkl}\mathbf{e}_l \tag{3.10}$$

onde $\epsilon_{ijkl} = -\epsilon_{mij}\epsilon_{mkl} - \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}$ é um tensor totalmente antisimétrico, para mais detalhes consulte [Gun96].

Desde que o espaço vetorial subjacente a $\mathbb{O}$ pode ser considerado como sendo $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{0,7} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$ o conjugado de Clifford para $X = X^0 + X^a\mathbf{e}_a \in \mathbb{O}$ é dado por $\bar{X} = X^0 - X^a\mathbf{e}_a$ onde X^0 e X^a são coeficientes reais[3]. O espaço vetorial subjacente à álgebra dos octonions é impossibilitado de afirmar quando a conjugação octonionica é equivalente à involução graduada, uma vez que a conjugação octonionica $\bar{X}$ pode ser escrita tanto como $\widehat{X}$ ou $\bar{X}$, em termos de morfismos da álgebra de Clifford. Mas é bem sabido que a conjugação octonionica $\bar{X}$ é involutiva e é um anti-automorfismo, o que exclui imediatamente a involução graduada. De fato, para $A, B \in \mathbb{O}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\overline{A\circ B} &= \overline{(A^0+A^a\mathbf{e}_a)\circ(B^0+B^b\mathbf{e}_b)} = A^0B^0 - A^0B^b\mathbf{e}_b - A^aB^0\mathbf{e}_a + A^aB^b(-\delta_{ab}+\epsilon_{ab}^{c}\mathbf{e}_c)\\
&= B^0A^0 - B^0A^a\mathbf{e}_a - B^bA^0\mathbf{e}_b + A^aB^b(-\delta_{ba}+\epsilon_{ba}^{c}\mathbf{e}_c) = \overline{(B^0+B^b\mathbf{e}_b)}\circ\overline{(A^0+A^a\mathbf{e}_a)}\\
&= \bar{B}\circ\bar{A}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2 O Produto-$\bullet$ e o Produto-$\odot$ em S^7

Sejam $A, B, X \in \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{0,7}$, com X sendo um octonion unitário ($X\bar{X} = \bar{X}X = 1$) tal que $X \in S^7$, o produto-X de A e B é definido por [Ced95, Ced93, Dix94a]

$$\boxed{A\circ_X B := (A\circ X)\circ(\bar{X}\circ B)} \tag{3.12}$$

Para o caso particular $X = B \in S^7$ obtem-se o produto octonionico usual. Com efeito, $(A\circ B)\circ(\bar{B}\circ B) = A\circ B$. Abaixo apresentamos expressões mostradas em [Dix94a, Ced95]

$$\boxed{(A\circ X)\circ(\bar{X}\circ B) = X\circ((\bar{X}\circ A)\circ B) = (A\circ(B\circ X))\circ\bar{X}} \tag{3.13}$$

Queremos encontrar uma generalização para a expressão $(A\circ X)\circ(\bar{X}\circ B) = (A\circ(B\circ X))\circ\bar{X}$ a fim de englobar toda álgebra exterior construída sobre o espaço tangente num ponto arbitrário em S^7 e assim,

[3]Estamos usando a convenção da soma para indicar que $X^a\mathbf{e}_a$ denota $X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + \cdots + X^7\mathbf{e}_7 = \sum_{a=1}^{7} X^a\mathbf{e}_a$

para o lugar de $X \in \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{0,7}$ podemos colocar uma expressão equivalente para $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ que manifesta toda estrutura das álgebras exterior e de Clifford sobre S^7.

Pelo fato da não-associatividade dos octonions, em geral segue que $A \circ_X B \neq A \circ B$. Mas para X fixado a álgebra $\mathbb{O}_X$ ($\mathbb{O}$ munido com o produto-X) é isomorfa a $\mathbb{O}$. A mudança de sinal em módulo para cada X dá origem a uma cópia distinta de $\mathbb{O}$, assim a órbita das cópias de $\mathbb{O}$ oriundas de alguma cópia inicial dada é

$$S^7/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^7$$

a variedade obtida a partir da esfera S^7 pela identificação dos pontos opostos. De fato, o produto-$(-X)$ entre A e B octonions resulta

$$A \circ_{-X} B = (A\circ(-X))\circ((\bar{-X})\circ B) = -(A\circ B)\circ(-\bar{X}\circ B) = (A\circ X)\circ(\bar{X}\circ B) = A\circ_X B$$

Além disso, dados A e B octonions, efetuando-se o produto-X primeiramente e depois o produto-Y entre A e B é o mesmo que fazer o produto-XY diretamente. Isto é, se $X, Y \in S^7 \subset \mathbb{O}$ então

$$\begin{aligned}
AB \xrightarrow{X} A\circ_X B &= (A\circ X)\circ(\bar{X}\circ B)\\
(A\circ X)\circ(\bar{X}\circ B) \xrightarrow{Y} (A\circ_Y X)\circ_Y(\bar{X}\circ_Y B) &= \left[((A\circ Y)\circ(\bar{Y}\circ X))\circ Y\right]\circ\left[\bar{Y}\circ((\bar{X}\circ Y)\circ(\bar{Y}\circ B))\right]\\
&= \left[((A\circ(X\circ Y))\circ\bar{Y})\circ Y\right]\circ\left[\bar{Y}\circ(Y\circ((\bar{Y}\circ\bar{X})\circ B))\right]\\
&= \left[A\circ(X\circ Y)\right]\circ\left[(\bar{Y}\circ\bar{X})\circ B\right]\\
&= \left[A\circ(X\circ Y)\right]\circ\left[(\overline{X\circ Y})\circ B\right]\\
&= A\circ_{XY} B
\end{aligned}$$

usando o fato de que a álgebra dos octonions é uma álgebra alternativa[4], donde

$$(U\circ\bar{X})\circ X = U\circ(\bar{X}\circ X) = U = (\bar{X}\circ X)\circ U = \bar{X}\circ(X\circ U)$$

para $X \in S^7$ e para todo $U \in \mathbb{O}$.

Similarmente, efetuando-se o produto-X e em seguida o produto-Y tal como

$$AB \xrightarrow{X} A\circ_X B = (A\circ X)\circ(\bar{X}\circ B) \xrightarrow{Y} (A\circ_X Y)\circ_X(\bar{Y}\circ_X B) = A\circ_{YX} B$$

é o mesmo que fazer o produto-YX. Ou seja, a deformação do produto-X pelo produto-Y não sofre mudanças, para tanto temos o novo produto-XY. Em geral o resultado do produto-X, $\mathbf{e}_a \circ_X \mathbf{e}_b$ com $0 \neq a \neq b \neq 0$, será uma combinação linear de $\mathbf{e}_c$, $c \in \{1,\ldots,7\}$. Entretanto, existem alguns X tais que para todo $a, b \in \{1,\ldots,7\}$ teremos um $c \in \{1,\ldots,7\}$ particular satisfazendo

$$\mathbf{e}_a \circ_X \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_c \tag{3.14}$$

▷ **Exemplo 8:** Dado $X = X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \in S^7$, então [Dix94b]

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1\circ_X\mathbf{e}_2 = {} & ((X^0)^2+(X^1)^2+(X^2)^2+(X^6)^2-(X^3)^2-(X^4)^2-(X^5)^2-(X^7)^2)\mathbf{e}_6\\
&+2(X^0X^5+X^1X^7-X^2X^4+X^3X^6)\mathbf{e}_3+2(-X^0X^7+X^1X^5+X^2X^3+X^4X^6)\mathbf{e}_4\\
&+2(-X^0X^3-X^1X^4-X^2X^7+X^5X^6)\mathbf{e}_5+2(X^0X^4-X^1X^3+X^2X^5+X^7X^6)\mathbf{e}_7
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Fazendo $X = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_7)/2$ tem-se

$$\mathbf{e}_1\circ_X\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3$$

◁

[4]A álgebra dos octonions é alternativa pois para $A, B \in \mathbb{O}$ satisfaz:

$$(A\circ A)\circ B = A\circ(A\circ B) \qquad (A\circ B)\circ A = A\circ(B\circ A) \qquad (B\circ A)\circ A = B\circ(A\circ A)$$

Mais detalhes podem ser vistos na Definição 5 e Eqs.(3.65), (3.66) e (3.67).

► **Obs.4:** Fibrações de Hopf.

Em topologia a fibração de Hopf descreve uma 3-esfera em termos de círculos e uma esfera ordinária. Descoberta por Heinz Hopf em 1931 [Hop31], é um dos primeiros exemplos importantes de fibrado. Hopf encontrou uma função contínua (ou mapa) da 3-esfera para a 2-esfera tal que para todo ponto p na esfera S^2, sua pré-imagem é um círculo S^1 em S^3. Existem várias descrições dessa fibração de Hopf. Uma delas é que, como sendo uma subvariedade de $\mathbb{R}^4$, a 3-esfera S^3 é dada por $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = 1\}$, enquanto que S^2, visto como subvariedade de $\mathbb{R}^3$, é dado por $\{(y_1, y_2, y_3) : (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2 = 1\}$.

O mapa de Hopf é dado explicitamente por

$$\begin{aligned} y_1 &= 2(x_1x_2 + x_3x_4) \\ y_2 &= 2(x_1x_4 - x_2x_3) \\ y_3 &= x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \end{aligned}$$

Todo pondo em S^2 corresponde a um círculo denominado círculo de Hopf em S^3. Podemos ainda verificar que $\rho \colon S^3 \to S^2$ realmente mapeia S^3 em S^2, já que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \tag{3.16}$$

Existem inúmeras generalizações da fibração de Hopf. A esfera unitária em $\mathbb{C}^{n+1}$ fibra naturalmente sobre $\mathbb{C}P^n$ com círculos como fibras, e existem também versões reais, quaternionicas e octonionicas dessas fibrações. Em particular, a fibração de Hopf pertence a uma família de quatro fibrados nos quais o espaço total, o espaço base e o espaço das fibras são todos esferas:

$$\begin{aligned} &S^0 \cdots S^1 \to S^1 \\ &S^1 \cdots S^3 \to S^2 \\ &S^3 \cdots S^7 \to S^4 \\ &S^7 \cdots S^{15} \to S^8 \end{aligned}$$

Na verdade, como consequencia do Teorema de Adams, essas são as únicas fibrações entre esferas.

As fibrações de Hopf têm várias aplicações em mecânica quântica, em topologia, na teoria de twisters e recentemente na medicina [Spp98]. A seguir explicitaremos a fibração de Hopf $S^3 \cdots S^7 \to S^4$.

Dadas as esferas $S^7 = \{X^a : (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2 = 1\}$ e $S^4 = \{A^3, A^4, A^5, A^6, A^7 : (A^3)^2 + (A^4)^2 + (A^5)^2 + (A^6)^2 + (A^7)^2 = 1\}$ o mapa de Hopf é definido por

$$\begin{aligned} &A^3 = 2(X^0X^5 + X^1X^7 - X^2X^4 + X^3X^6) \\ &A^4 = 2(-X^0X^7 + X^1X^5 + X^2X^3 + X^4X^6) \\ &A^5 = 2(-X^0X^3 - X^1X^4 - X^2X^7 + X^5X^6) \\ &A^6 = ((X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^6)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 - (X^5)^2 - (X^7)^2) \\ &A^7 = 2(X^0X^4 - X^1X^3 + X^2X^5 + X^7X^6) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Pela definição do produto-X, considere o produto $\mathbf{e}_1 \circ_X \mathbf{e}_2$, dado pela Eq.(3.15) com $X\bar{X} = 1$, $X \in S^7$. A expressão acima pode ser reescrita como

$$\mathbf{e}_1 \circ_X \mathbf{e}_2 = A^3\mathbf{e}_3 + A^4\mathbf{e}_4 + A^5\mathbf{e}_5 + A^6\mathbf{e}_6 + A^7\mathbf{e}_7$$

onde $A \in \mathbb{O}_X$ e $A \in S^4$. Podemos verificar que o produto $\mathbf{e}_1 \circ_X \mathbf{e}_2$ é um mapa da esfera S^7 na esfera S^4 uma vez que

$$(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2$$

$$= (A^3)^2 + (A^4)^2 + (A^5)^2 + (A^6)^2 + (A^7)^2 = 1$$

Mais geralmente, podemos verificar que cada produto-X entre elementos da base dos octonions produz um mapa de Hopf de maneira semelhante. Podemos ainda calcular o produto-X entre alguns elementos da base de $\mathbb{O}$, a saber

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \circ_X \mathbf{e}_2 &= ((X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^6)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 - (X^5)^2 - (X^7)^2)\mathbf{e}_6 \\
&+2(X^0X^5 + X^1X^7 - X^2X^4 + X^3X^6)\mathbf{e}_3 + 2(-X^0X^7 + X^1X^5 + X^2X^3 + X^4X^6)\mathbf{e}_4 \\
&+2(-X^0X^3 - X^1X^4 - X^2X^7 + X^5X^6)\mathbf{e}_5 + 2(X^0X^4 - X^1X^3 + X^2X^5 + X^7X^6)\mathbf{e}_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_3 \circ_X \mathbf{e}_4 &= ((X^0)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 + (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^5)^2 - (X^6)^2 - (X^7)^2)\mathbf{e}_1 \\
&+2(X^0X^7 + X^3X^2 - X^4X^6 + X^5X^1)\mathbf{e}_5 + 2(-X^0X^2 + X^3X^7 + X^4X^5 + X^6X^1)\mathbf{e}_6 \\
&+2(-X^0X^5 - X^3X^6 - X^4X^2 + X^7X^1)\mathbf{e}_7 + 2(X^0X^6 - X^3X^5 + X^4X^7 + X^2X^1)\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_4 \circ_X \mathbf{e}_5 &= ((X^0)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^2)^2 - (X^1)^2 - (X^3)^2 - (X^6)^2 - (X^7)^2)\mathbf{e}_2 \\
&+2(X^0X^1 + X^4X^3 - X^5X^7 + X^6X^2)\mathbf{e}_6 + 2(-X^0X^3 + X^4X^1 + X^5X^6 + X^7X^2)\mathbf{e}_7 \\
&+2(-X^0X^6 - X^4X^7 - X^5X^3 + X^1X^2)\mathbf{e}_1 + 2(X^0X^7 - X^4X^6 + X^5X^1 + X^3X^2)\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_5 \circ_X \mathbf{e}_6 &= ((X^0)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^3)^2 - (X^2)^2 - (X^4)^2 - (X^7)^2 - (X^1)^2)\mathbf{e}_3 \\
&+2(X^0X^2 + X^5X^4 - X^6X^1 + X^7X^3)\mathbf{e}_7 + 2(-X^0X^4 + X^5X^2 + X^6X^7 + X^1X^3)\mathbf{e}_1 \\
&+2(-X^0X^7 - X^5X^1 - X^6X^4 + X^2X^3)\mathbf{e}_2 + 2(X^0X^1 - X^5X^7 + X^6X^2 + X^4X^3)\mathbf{e}_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_6 \circ_X \mathbf{e}_7 &= ((X^0)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2 + (X^4)^2 - (X^3)^2 - (X^5)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2)\mathbf{e}_4 \\
&+2(X^0X^3 + X^6X^5 - X^7X^2 + X^1X^4)\mathbf{e}_1 + 2(-X^0X^5 + X^6X^3 + X^7X^1 + X^2X^4)\mathbf{e}_2 \\
&+2(-X^0X^1 - X^6X^2 - X^7X^5 + X^3X^4)\mathbf{e}_3 + 2(X^0X^2 - X^6X^1 + X^7X^3 + X^5X^4)\mathbf{e}_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \circ_X \mathbf{e}_3 &= ((X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 - (X^2)^2 - (X^5)^2 - (X^6)^2 - (X^7)^2)\mathbf{e}_4 \\
&+2(X^0X^2 + X^1X^6 - X^3X^7 + X^5X^4)\mathbf{e}_5 + 2(-X^0X^6 + X^1X^2 + X^3X^5 + X^7X^4)\mathbf{e}_7 \\
&+2(-X^0X^5 - X^1X^7 - X^3X^6 + X^2X^4)\mathbf{e}_2 + 2(X^0X^7 - X^1X^5 + X^3X^2 + X^6X^4)\mathbf{e}_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_2 \circ_X \mathbf{e}_4 &= ((X^0)^2 + (X^2)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 - (X^1)^2 - (X^3)^2 - (X^6)^2 - (X^7)^2)\mathbf{e}_5 \\
&+2(X^0X^3 + X^2X^7 - X^4X^1 + X^6X^5)\mathbf{e}_6 + 2(-X^0X^7 + X^2X^3 + X^4X^6 + X^1X^5)\mathbf{e}_1 \\
&+2(-X^0X^6 - X^2X^1 - X^4X^7 + X^3X^5)\mathbf{e}_3 + 2(X^0X^1 - X^2X^6 + X^4X^3 + X^7X^5)\mathbf{e}_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_3 \circ_X \mathbf{e}_5 &= ((X^0)^2 + (X^3)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^4)^2 - (X^7)^2)\mathbf{e}_6 \\
&+2(X^0X^4 + X^3X^1 - X^5X^2 + X^7X^6)\mathbf{e}_7 + 2(-X^0X^1 + X^3X^4 + X^5X^7 + X^2X^6)\mathbf{e}_2 \\
&+2(-X^0X^7 - X^3X^2 - X^5X^1 + X^4X^6)\mathbf{e}_4 + 2(X^0X^2 - X^3X^7 + X^5X^4 + X^1X^6)\mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_4 \circ_X \mathbf{e}_6 &= ((X^0)^2 + (X^4)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^5)^2)\mathbf{e}_7 \\
&+2(X^0X^5 + X^4X^2 - X^6X^3 + X^1X^7)\mathbf{e}_1 + 2(-X^0X^2 + X^4X^5 + X^6X^1 + X^3X^7)\mathbf{e}_3 \\
&+2(-X^0X^1 - X^4X^3 - X^6X^2 + X^5X^7)\mathbf{e}_5 + 2(X^0X^3 - X^4X^1 + X^6X^5 + X^2X^7)\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

◀

Dados $X, Y \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ fixos mas arbitrários tais que $X\bar{X} = \bar{X}X = 1 = \bar{Y}Y = Y\bar{Y}$ $(X, Y \in S^7)$ o produto-XY é definido como

$$\boxed{A \circ_{X,Y} B := (A \circ X) \circ (\bar{Y} \circ B)} \tag{3.18}$$

e em particular o produto-$(1, X)$ é dado por

$$\boxed{A \circ_{1,X} B := A \circ (\bar{X} \circ B)} \tag{3.19}$$

onde X é a unidade do produto-$(1, X)$ acima, já que $A \circ_{1,X} X = X \circ_{1,X} A = A$ [Ced95, Dix94a].

Um produto não-associativo chamado de produto-u foi introduzido em [RV06a] como uma generalização natural para o produto-X. Por completeza, veremos brevemente o respectivo produto e como foi obtido em [RV06a], subsequentemente apresentamos a mais geral classe dos produtos não-associativos sobre S^7. Introduzindo o produto-u como

$$A \circ_u B := (Au) \circ (\bar{u}B), \tag{3.20}$$

se Au e $\bar{u}B$ são interpretados como produtos de Clifford, os elementos $u, \bar{u} \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$, tais que Au e $\bar{u}B$ sejam octonions, devem ser escalares. Neste caso $A \circ_u B \equiv A \circ B$ e não haverá nada de novo para ser investigado. Para que a Eq.(3.20) faça sentido, todas as quantidades entre parenteses devem ser octonions, e para evitar o caso trivial (onde u é escalar) temos que definir o produto entre octonions e multivetores de Clifford que resulta em um octonion. Para multivetores homogêneos $u = u_1 \dots u_k \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$, onde $\{u_p\}_{p=1}^k \subset \mathbb{R}^{0,7}$ e $A \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$, os produtos $\bullet_\llcorner$ e $\bullet_\lrcorner$ são definidos [RV06a] por

$$\begin{aligned} \bullet_\llcorner : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \times \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) &\to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \\ (A, u) &\mapsto A \bullet_\llcorner u = ((\cdots((A \circ u_1) \circ u_2) \circ \cdots) \circ u_{k-1}) \circ u_k \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \bullet_\lrcorner : \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) \times (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) &\to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \\ (u, A) &\mapsto u \bullet_\lrcorner A = u_1 \circ (u_2 \circ (\cdots \circ (u_{k-1} \circ (u_k \circ A)) \cdots)) \end{aligned} \tag{3.22}$$

► **Obs.5:** A expressão $X\bar{X} = \bar{X}X = 1$ define S^7 para $X \in \mathbb{O}$. O produto $A \circ_X B = (A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B)$, definido na Eq.(3.12), foi motivado no sentido de que possa ser escrito como $A \circ_X B = (A \circ X) \circ (X^{-1} \circ B)$, já que para todo $X \in S^7$ segue que $X^{-1} = \bar{X}$. Agora, para um multivetor $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ esse produto foi generalizado em [RV06a] e precisamos enfatizar que para $(A \bullet_\llcorner u) \circ (u^{-1} \bullet_\lrcorner B)$ estar bem definido é preciso existir o inverso u^{-1} associado ao multivetor $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$. Em geral, como $u\bar{u}$ não tem somente uma componente escalar — de fato $u\bar{u} \neq \bar{u}u$ em geral como visto na Seção 2.7 — a existência de um elemento inversível $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ é uma condição necessária para definir-se uma generalização do produto-X para que $(A \bullet_\llcorner u) \circ (u^{-1} \bullet_\lrcorner B)$ seja equivalente a $(A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B)$.

O principal objetivo desta dissertação é considerar as generalizações de $X\bar{X} = \bar{X}X = 1$ definindo S^7 no contexto da álgebra de Clifford para um elemento arbitrário $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ assumindo as deformações subsequentes na álgebra dos octonions. Em geral $u\bar{u}$ e $\bar{u}u$ não são escalares, e o único caso onde podemos garantir que $u^{-1} = \pm\bar{u}$ — ou equivalentemente $\bar{u}u = \pm 1$ — em geral é considerando-se apenas os elementos simples e homogêneos $u \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, ver **Obs.1**, onde seguramente podemos afirmar que $u^{-1} = \pm\bar{u}$. ◀

► **Obs.6:** É claro que estendendo o produto para escalares na Eq.(3.21) — elementos de $\Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$ — temos que $A \bullet_\llcorner a = aA$, que denota a multiplicação trivial por escalares, onde $a \in \mathbb{R} = \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$. Portanto agora é possível estender por linearidade o produto $\bullet_\llcorner$ para toda álgebra exterior $\Lambda(\mathbb{R}^{0,7}) = \oplus_{i=0}^7 \Lambda_i(\mathbb{R}^{0,7})$ de tal maneira que os produtos estendidos agora são denotados por

$$\dot{\bullet}_\llcorner : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \times \Lambda(\mathbb{R}^{0,7}) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \tag{3.23}$$

$$\dot{\bullet}_\lrcorner : \Lambda(\mathbb{R}^{0,7}) \times (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \tag{3.24}$$

◀

► **Obs.7:** Na **Obs.6** estendemos por linearidade os produtos nas Eqs.(3.21) e (3.22) a partir de $\Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$ para toda a álgebra exterior $\Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$ de tal maneira que agora consideramos $u \in \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$. Portanto, quando restringimos u ao espaço dos paravetores, i.e., $u \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \hookrightarrow \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$, u se torna um octonion. Além disso, todos os produtos $\dot{\bullet}_\llcorner$, $\dot{\bullet}_\lrcorner$, e o produto octonionico usual $\circ$ são equivalentes, sendo que todos os produtos tomam dois elementos do espaço dos paravetores $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ e levam a outro elemento do espaço dos paravetores via produto usual dos octonions definido na Eq.(3.1). ◄

De agora em diante usaremos unicamente o símbolo $\bullet$ para denotar os produtos $\dot{\bullet}_\llcorner$ e $\dot{\bullet}_\lrcorner$, na Eq.(3.23) e Eq.(3.24), e também os prudutos $\bullet_\llcorner$ e $\bullet_\lrcorner$, nas Eqs.(3.21) e (3.22). Em cada um dos produtos mencionados está implícito claramente que existe um octonion à direita ou à esquerda do produto-$\bullet$.

No atual estágio deste trabalho, optamos pelo produto-$\bullet$ somente à esquerda, uma vez que podemos escrever o produto à esquerda em função do produto realizado à direita tal como o formalismo em [Dix94a], porém não somente formalizamos o produto como o generalizamos para todo fibrado exterior.

▷ **Exemplo 9:** $X \circ \mathbf{e}_1 = \dfrac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5\mathbf{e}_7) \bullet_\lrcorner X, \quad \forall X \in \mathbb{O}.$◁

Dado um elemento $u \in \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$, o produto-$u$ é definido como

$$\begin{array}{rcl} \circ_u\colon (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \times (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) & \to & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \\ (A, B) & \mapsto & A \circ_u B := (A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B). \end{array} \tag{3.25}$$

Seguindo na mesma linha de pensamento de [RV06a] nos perguntamos especificamente qual a relação entre os termos abaixo

$$A \circ_u B := (A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B), \qquad (A \circ (B \bullet_\llcorner u)) \bullet_\llcorner \bar{u}, \qquad u \bullet_\lrcorner ((\bar{u} \bullet_\lrcorner A) \circ B), \tag{3.26}$$

num contexto onde alguma generalização similar relacionada a Eq.(3.12) pode ser construída no formalismo não-associativo induzido pelo produto-u.

▷ **Exemplo 10:** Tomando $u = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$, $A = A^2\mathbf{e}_2 + A^4\mathbf{e}_4 \in \mathbb{O}$, e $B = B^1\mathbf{e}_1 + B^5\mathbf{e}_5 \in \mathbb{O}$, segue-se que

$$\begin{aligned} & (A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B) \\ = \; & \left[(A^2\mathbf{e}_2 + A^4\mathbf{e}_4) \bullet_\llcorner (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\right] \circ \left[(\overline{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}) \bullet_\lrcorner (B^1\mathbf{e}_1 + B^5\mathbf{e}_5)\right] \\ = \; & (-A^2\mathbf{e}_6 + A^2\mathbf{e}_3 + A^4\mathbf{e}_3 - A^4\mathbf{e}_6) \circ (B^1 - B^5\mathbf{e}_7 + B^1\mathbf{e}_5 - B^5\mathbf{e}_1) \\ = \; & -A^2B^1\mathbf{e}_6 + A^2B^5\mathbf{e}_4 + A^2B^1\mathbf{e}_3 + A^2B^5\mathbf{e}_2 + A^2B^1\mathbf{e}_3 - A^2B^5\mathbf{e}_2 + A^2B^1\mathbf{e}_6 + A^2B^5\mathbf{e}_4 \\ & + A^4B^1\mathbf{e}_3 - A^4B^5\mathbf{e}_2 + A^4B^1\mathbf{e}_6 + A^4B^5\mathbf{e}_4 - A^4B^1\mathbf{e}_6 + A^4B^5\mathbf{e}_4 + A^4B^1\mathbf{e}_3 + A^4B^5\mathbf{e}_2 \\ = \; & 2\left(A^2B^5\mathbf{e}_4 + A^2B^1\mathbf{e}_3 + A^4B^1\mathbf{e}_3 + A^4B^5\mathbf{e}_4\right) \end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} & (A \circ (B \bullet_\llcorner u)) \bullet_\llcorner \bar{u} \\ = \; & \left[(A^2\mathbf{e}_2 + A^4\mathbf{e}_4) \circ \left[(B^1\mathbf{e}_1 + B^5\mathbf{e}_5) \bullet_\llcorner (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\right]\right] \bullet_\llcorner (\overline{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}) \\ = \; & \left[(A^2\mathbf{e}_2 + A^4\mathbf{e}_4) \circ (-B^1 - B^1\mathbf{e}_5 - B^5\mathbf{e}_7 + B^5\mathbf{e}_1)\right] \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) \\ = \; & (-A^2B^1\mathbf{e}_2 + A^2B^1\mathbf{e}_4 + A^2B^5\mathbf{e}_3 - A^2B^5\mathbf{e}_6 - A^4B^1\mathbf{e}_4 - A^4B^1\mathbf{e}_2 + A^4B^5\mathbf{e}_6 + A^4B^5\mathbf{e}_3) \\ & \bullet_\llcorner(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) \\ = \; & -A^2B^1\mathbf{e}_6 - A^2B^1\mathbf{e}_3 - A^2B^1\mathbf{e}_3 - A^2B^1\mathbf{e}_6 + A^2B^5\mathbf{e}_4 - A^2B^5\mathbf{e}_2 + A^2B^2\mathbf{e}_2 - A^2B^5\mathbf{e}_4 \\ & + A^4B^1\mathbf{e}_3 + A^4B^1\mathbf{e}_6 - A^4B^1\mathbf{e}_6 - A^4B^1\mathbf{e}_3 - A^4B^5\mathbf{e}_2 + A^4B^5\mathbf{e}_4 + A^4B^5\mathbf{e}_4 - A^4B^5\mathbf{e}_2 \\ = \; & 2\left(-A^2B^1\mathbf{e}_6 - A^2B^1\mathbf{e}_3 - A^4B^5\mathbf{e}_2 + A^4B^5\mathbf{e}_4\right). \end{aligned}$$

◁

Uma questão em aberto sobre a validade da expressão $(A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = (A \circ (B \circ X)) \circ \bar{X}$ para uma definição mais geral diz respeito a como o uso do produto-$\bullet$ ao invés do produto octonionico padrão afeta a Eq.(3.13), uma resposta para um caso particular foi apresentada em [RV06a]. Especificamente, podemos argumentar onde a inserção do produto-u poderia nos permitir a imediata generalização de tal expressão, a fim de considerar toda álgebra exterior construída no espaço tangente num ponto arbitrário em S^7. No lugar de $X \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$, uma expressão análoga para $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ que expresse a estrutura algébrica não-associativa relacionada ao fibrado exterior sobre S^7 pode ser obtida.

Em geral as Eqs.(3.13) não são generalizáveis e pode ser verificado que

$$\boxed{(A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B) \neq (A \circ (B \bullet_\llcorner u)) \bullet_\llcorner \bar{u}} \tag{3.27}$$

como no Exemplo 10 acima. Quando u é um paravetor — um elemento de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ — é fácil ver que o produto-u é equivalente ao produto-X.

▶ **Obs.8:** Da expressão acima vemos que não podemos generalizar a Eq.(3.13) somente substituindo o parametro $X \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ por $u \in \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$, portanto de agora em diante o intuito deste capítulo é encontrar uma expressão mais geral que possa dar conta dessa generalização e que seja reconduzida à Eq.(3.13) quando consideramos u um paravetor, ou seja, quando $u = \langle u \rangle_{0\oplus 1}$. Para tanto, precisamos generalizar o formalismo introduzido em [Dix94a] e [Ced93, Ced95] construindo explicitamente um formalismo capaz de descrever produtos não-associativos nos fibrados exterior e de Clifford sobre a esfera S^7 [Gun95, Wit84]. Todo formalismo abaixo se trata de uma extensão inédita do trabalho [RV06a] tendo como resultado a obtenção da generalização de algumas estruturas não-associativas, não somente no espaço tangente em um ponto $X \in S^7$ mas a todo fibrado exterior e de Clifford sobre S^7 [Eld00a, Eld00b, Bot58]. Para tanto, precisamos generalizar as expressões em [Dix94a, Dix94b, Dix95, Roo84, Ced93, Ced95].◀

Numa analogia próxima ao produto-XY e ao produto-$(1, X)$, respectivamente definidos pelas Eqs.(3.18) e (3.19), também é possível definir outros produtos, o produto-$(1, u)$, como

$$\begin{aligned} \circ_{1,u} \colon (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \times (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) &\to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \\ (A, B) &\mapsto A \circ_{1,u} B := (A \circ 1) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B) = A \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B) \end{aligned} \tag{3.28}$$

e o produto-(u, v) que generaliza a Eq.(3.18) para $u, v \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ fixos como segue:

$$\begin{aligned} \circ_{u,v} \colon (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \times (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) &\to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \\ (A, B) &\mapsto A \circ_{u,v} B := (A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{v} \bullet_\lrcorner B). \end{aligned} \tag{3.29}$$

▶ **Proposição 5:** *Dado $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ e $A \in \mathbb{O}$, segue-se que*

$$u \bullet_\lrcorner (A \bullet_\llcorner u) = (u \bullet_\lrcorner A) \bullet_\llcorner u = u \bullet_\lrcorner A \bullet_\llcorner u. \tag{3.30}$$

◀

Nesta Seção apresentaremos ainda os pré-requisitos algébricos para demonstrar que apesar da Eq.(3.13) não ser válida em geral, ainda é possível exibir uma relação mais fraca remanescente ainda válida. Consideraremos $A = \mathbf{e}_a$ e $B = \mathbf{e}_b$ na Eq.(3.13), onde a relação entre

$$(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \bullet_\llcorner \bar{u} \tag{3.31}$$

será discutida.

Dados $u = u_1 \ldots u_k$ e $v = v_1 \ldots v_l \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$, o produto não-associativo entre elementos da álgebra de Clifford foi definido por [RV06a] como

$$\begin{array}{rcl} \odot_{\llcorner} \colon \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \\ (u,v) & \mapsto & u \odot_{\llcorner} v := u_1 \circ (u_2 \circ (\cdots \circ (u_{k-1} \circ (u_k \bullet_{\llcorner} v)) \cdots)). \end{array} \tag{3.32}$$

$$\begin{array}{rcl} \odot_{\lrcorner} \colon \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7} \\ (u,v) & \mapsto & u \odot_{\lrcorner} v := ((\cdots \circ ((u \bullet_{\lrcorner} v_1) \circ v_2) \circ \cdots) \circ v_{l-1}) \circ v_l. \end{array} \tag{3.33}$$

O símbolo $\odot$ denota ambos os produtos $\odot_{\llcorner}$ e $\odot_{\lrcorner}$. É fácil ver que, ao restringirmos elementos de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ ao espaço dos paravetores $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$, então $A \bullet B \equiv A \circ B$ e $A \odot B \equiv A \circ B$, onde $A, B \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$.

$\triangleright$ **Exemplo 11:** Vamos calcular o produto $(2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6) \odot_{\llcorner} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$:

$$\begin{aligned} (2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6) \odot_{\llcorner} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 &= 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \odot_{\llcorner} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 - 7\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_{\llcorner} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 = 2\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_2 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4) - 7\mathbf{e}_5 \circ (\mathbf{e}_6 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4) \\ &= 2\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_7 \circ \mathbf{e}_4) - 7\mathbf{e}_5 \circ (\mathbf{e}_5 \circ \mathbf{e}_4) = 2\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_6 - 7\mathbf{e}_5 \circ (-\mathbf{e}_2) \\ &= -2\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_4, \end{aligned} \tag{3.34}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} (2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6) \odot_{\lrcorner} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 &= 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \odot_{\lrcorner} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 - 7\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_{\lrcorner} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 = 2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_3) \circ \mathbf{e}_4 - 7(\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_3) \circ \mathbf{e}_4 \\ &= 2(\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_7) \circ \mathbf{e}_4 - 7(\mathbf{e}_5 \circ \mathbf{e}_5) \circ \mathbf{e}_4 = 2(-\mathbf{e}_5) \circ \mathbf{e}_4 + 7\mathbf{e}_4 \\ &= +2\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_4, \end{aligned} \tag{3.35}$$

logo as Eqs.(3.34,3.35) não podem ser levadas umas às outras através de automorfismos ou anti-automorfismos de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$. $\triangleleft$

No que segue está implícito que $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ não é escalar, uma vez que para o caso escalar não haveria nada de novo a ser feito, pois $A = 1 \circ A = 1 \bullet A = 1 \odot A, \quad \forall A \in \mathbb{O}$.

Todos os produtos possíveis que foram obtidos a partir das combinações entre $\circ, \bullet_{\llcorner}, \bullet_{\lrcorner}, \odot_{\llcorner}$, e $\odot_{\lrcorner}$ estão listados abaixo. Alguns exemplos são exibidos para ilustrar os diferentes valores obtidos simplesmente fazendo-se a troca ou inversão de alguns elementos. Além disso, a generalização para os produtos u-, $(1,u)$-, e (u,v)- é fornecida em termos do *produto octonionico direcional*.

As definições acima nos permitem ver que o produto-$(1,u)$ pode ser generalizado para englobar e incluir multivetores de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ na primeira ou segunda entrada, assim o produto-$(1,u)$ para um multivetor de Clifford na primeira entrada é dado por

$$\begin{array}{rcl} \circ_{1,u} \colon \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} & \to & \mathbb{O} \\ (\psi, A) & \mapsto & \psi \circ_{1,u} A := (\psi \bullet_{\lrcorner} 1) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} A), \end{array} \tag{3.36}$$

que é a generalização imediata para o produto-$(1,u)$ definido na Eq.(3.28), já que $A \circ 1 = A$, $\forall A \in \mathbb{O}$ e $\psi \bullet_{\lrcorner} 1 \neq \psi$, $\forall \psi \in \mathcal{C}\ell_{0,7} \setminus (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7})$. Portanto, o produto seguinte também pode ser definido

$$\begin{array}{rcl} \blacktriangledown_{1,u} \colon \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} & \to & \mathbb{O} \\ (\psi, A) & \mapsto & \psi \blacktriangledown_{1,u} A := \psi \bullet_{\lrcorner} (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} A). \end{array} \tag{3.37}$$

Tal produto é uma generalização que não é análoga ao produto-$(1,u)$ definido na Eq.(3.28) mas é exatamente a generalização imediata do formalismo octonionico padrão dado pela Eq.(3.19).

Para um multivetor de Clifford à direita, duas possibilidades não equivalentes podem ser introduzidas em termos do produto-$\odot_{\lrcorner}$ e $\odot_{\llcorner}$:

$$\begin{array}{rcl} \circ^{\llcorner}_{1,u} \colon \mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\ (A, \psi) & \mapsto & A \circ^{\llcorner}_{1,u} \psi := (A \circ 1) \circ (\bar{u} \odot_{\llcorner} \psi) = A \circ (\bar{u} \odot_{\llcorner} \psi), \end{array} \tag{3.38}$$

enquanto que para o multivetor de Clifford à direita e o produto-$\odot_\lrcorner$ à esquerda

$$\begin{aligned} \circ^{\lrcorner}_{1,u}\colon \mathbb{O}\times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\to \mathbb{O} \\ (A,\psi) &\mapsto A\circ^{\lrcorner}_{1,u}\psi := (A\circ 1)\circ(\bar{u}\odot_\lrcorner \psi) = A\circ(\bar{u}\odot_\lrcorner \psi), \end{aligned} \tag{3.39}$$

a última extensão do produto-$(1,u)$ para $\psi,\phi\in\mathcal{C}\ell_{0,7}$ dados, fixos porém arbitrários, é definida por

$$\begin{aligned} \circ^{\lrcorner\llcorner}_{1,u}\colon \mathcal{C}\ell_{0,7}\times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\to \mathbb{O} \\ (\psi,\phi) &\mapsto \psi\circ^{\llcorner}_{1,u}\phi := (\psi\bullet_\lrcorner 1)\circ(\bar{u}\odot_\llcorner \phi), \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} \circ^{\lrcorner\lrcorner}_{1,u}\colon \mathcal{C}\ell_{0,7}\times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\to \mathbb{O} \\ (\psi,\phi) &\mapsto \psi\circ^{\lrcorner}_{1,u}\phi := (\psi\bullet_\lrcorner 1)\circ(\bar{u}\odot_\lrcorner \phi). \end{aligned} \tag{3.41}$$

E, para a generalização não similar segue

$$\begin{aligned} \blacktriangledown^{\llcorner}_{1,u}\colon \mathcal{C}\ell_{0,7}\times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\to \mathbb{O} \\ (\psi,\phi) &\mapsto \psi\blacktriangledown^{\llcorner}_{1,u}\phi := \psi\bullet_\lrcorner(\bar{u}\odot_\llcorner \phi), \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangledown^{\lrcorner}_{1,u}\colon \mathcal{C}\ell_{0,7}\times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\to \mathbb{O} \\ (\psi,\phi) &\mapsto \psi\blacktriangledown^{\lrcorner}_{1,u}\phi := \psi\bullet_\lrcorner(\bar{u}\odot_\lrcorner \phi). \end{aligned} \tag{3.43}$$

► **Obs.9:** Note que, $A\circ^{\llcorner}_{1,u}\psi = A\blacktriangledown^{\llcorner}_{1,u}\psi$ e $A\circ^{\lrcorner}_{1,u}\psi = A\blacktriangledown^{\lrcorner}_{1,u}\psi$, enquanto que $\psi\circ^{\llcorner}_{1,u}\phi \neq \psi\blacktriangledown^{\llcorner}_{1,u}\phi$, e $\psi\circ^{\lrcorner}_{1,u}\phi \neq \psi\blacktriangledown^{\lrcorner}_{1,u}\phi$, i.e., quando aparece um octonion na primeira entrada a igualdade entre os produtos $\circ_{1,u}$- e $\blacktriangledown_{1,u}$- é satisfeita. De fato,

$$\begin{aligned} A\circ^{\llcorner}_{1,u}\psi &= (A\circ 1)\circ(u\odot_\llcorner \psi) = A\circ(u\odot_\llcorner \psi) = A\blacktriangledown^{\llcorner}_{1,u}\psi \\ \psi\circ^{\llcorner}_{1,u}\phi &= (\psi\bullet_\lrcorner 1)\circ(\bar{u}\odot_\llcorner \phi) \neq \psi\bullet_\lrcorner(\bar{u}\odot_\llcorner \phi) = \psi\blacktriangledown^{\llcorner}_{1,u}\phi \end{aligned}$$

já que $\psi\bullet_\lrcorner 1$ em geral é um octonion e ψ é um multivetor de Clifford, o resultado de $A\circ^{\lrcorner}_{1,u}\psi = A\blacktriangledown^{\lrcorner}_{1,u}\psi$ e $\psi\circ^{\lrcorner}_{1,u}\phi \neq \psi\blacktriangledown^{\lrcorner}_{1,u}\phi$ segue analogamente. ◄

A fim de generalizar o produto-u para um multivetor de Clifford, um octonion é substituído por um multivetor de Clifford em uma de suas entradas. Primeiramente um multivetor de Clifford é introduzido na primeira entrada com o produto-$\odot$ à direita e à esquerda, e subsequentemente, o multivetor de Clifford está na segunda entrada como segue

$$\begin{aligned} \circ^{\llcorner\bullet}_{u}\colon \mathcal{C}\ell_{0,7}\times \mathbb{O} &\to \mathbb{O} \\ (\psi,A) &\mapsto \psi\circ^{\llcorner\bullet}_{u}A := (\psi\odot_\llcorner u)\circ(\bar{u}\bullet_\lrcorner A), \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} \circ^{\lrcorner\bullet}_{u}\colon \mathcal{C}\ell_{0,7}\times \mathbb{O} &\to \mathbb{O} \\ (\psi,A) &\mapsto \psi\circ^{\lrcorner\bullet}_{u}A := (\psi\odot_\lrcorner u)\circ(\bar{u}\bullet_\lrcorner A), \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} \circ^{\bullet\llcorner}_{u}\colon \mathbb{O}\times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\to \mathbb{O} \\ (A,\psi) &\mapsto A\circ^{\bullet\llcorner}_{u}\psi := (A\bullet_\llcorner u)\circ(\bar{u}\odot_\llcorner \psi), \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} \circ^{\bullet\lrcorner}_{u}\colon \mathbb{O}\times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\to \mathbb{O} \\ (A,\psi) &\mapsto A\circ^{\bullet\lrcorner}_{u}\psi := (A\bullet_\llcorner u)\circ(\bar{u}\odot_\lrcorner \psi). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Agora um multivetor arbitrário $\psi\in\mathcal{C}\ell_{0,7}$ é levado em conta em ambas entradas e uma escolha precisa ser feita para a direção do produto-$\odot$ introduzindo-se os produtos não-asssociativos direcionais. Para Eq.(3.48) no Exemplo 12 há cálculos explícitos que ilustram como efetuar os produtos $\circ_u^{\llcorner\llcorner}$ e $\circ_u^{\llcorner\lrcorner}$.

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_u^{\llcorner\llcorner} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, \phi) & \mapsto & \psi \circ_u^{\llcorner\llcorner} \phi := (\psi \odot_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \odot_{\llcorner} \phi),
\end{array} \tag{3.48}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_u^{\llcorner\lrcorner} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, \phi) & \mapsto & \psi \circ_u^{\llcorner\lrcorner} \phi := (\psi \odot_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \odot_{\lrcorner} \phi),
\end{array} \tag{3.49}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_u^{\lrcorner\llcorner} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, \phi) & \mapsto & \psi \circ_u^{\lrcorner\llcorner} \phi := (\psi \odot_{\lrcorner} u) \circ (\bar{u} \odot_{\llcorner} \phi),
\end{array} \tag{3.50}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_u^{\lrcorner\lrcorner} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, \phi) & \mapsto & \psi \circ_u^{\lrcorner\lrcorner} \phi := (\psi \odot_{\lrcorner} u) \circ (\bar{u} \odot_{\lrcorner} \phi).
\end{array} \tag{3.51}
$$

Neste momento, o produto-(u, v) é generalizado [RV06a]. Para tanto o produto é considerado com entradas em $\mathbb{O}$ e em $\mathcal{C}\ell_{0,7}$, onde em ambos os casos o produto-$\odot$ é efetuado nas duas direções.

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_{u,v}^{\llcorner\bullet} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, A) & \mapsto & \psi \circ_{u,v}^{\llcorner\bullet} A := (\psi \odot_{\llcorner} u) \circ (\bar{v} \bullet_{\lrcorner} A),
\end{array} \tag{3.52}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_{u,v}^{\lrcorner\bullet} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, A) & \mapsto & \psi \circ_{u,v}^{\lrcorner\bullet} A := (\psi \odot_{\lrcorner} u) \circ (\bar{v} \bullet_{\lrcorner} A),
\end{array} \tag{3.53}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_{u,v}^{\bullet\llcorner} : \mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(A, \psi) & \mapsto & A \circ_{u,v}^{\bullet\llcorner} \psi := (A \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{v} \odot_{\llcorner} \psi),
\end{array} \tag{3.54}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_{u,v}^{\bullet\lrcorner} : \mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(A, \psi) & \mapsto & A \circ_{u,v}^{\bullet\lrcorner} \psi := (A \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{v} \odot_{\lrcorner} \psi).
\end{array} \tag{3.55}
$$

Finalmente, o produto-(u, v) pode ser generalizado para multivetores de Clifford em ambas as entradas como feito em [RV06a] mas com uma diferença, agora ambas as direções relacionadas com o produto-$\odot$ serão explicitamente consideradas

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_{u,v}^{\llcorner\llcorner} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, \phi) & \mapsto & \psi \circ_{u,v}^{\llcorner\llcorner} \phi := (\psi \odot_{\llcorner} u) \circ (\bar{v} \odot_{\llcorner} \phi),
\end{array} \tag{3.56}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_{u,v}^{\llcorner\lrcorner} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, \phi) & \mapsto & \psi \circ_{u,v}^{\llcorner\lrcorner} \phi := (\psi \odot_{\llcorner} u) \circ (\bar{v} \odot_{\lrcorner} \phi),
\end{array} \tag{3.57}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_{u,v}^{\lrcorner\llcorner} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, \phi) & \mapsto & \psi \circ_{u,v}^{\lrcorner\llcorner} \phi := (\psi \odot_{\lrcorner} u) \circ (\bar{v} \odot_{\llcorner} \phi),
\end{array} \tag{3.58}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\circ_{u,v}^{\lrcorner\lrcorner} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} & \to & \mathbb{O} \\
(\psi, \phi) & \mapsto & \psi \circ_{u,v}^{\lrcorner\lrcorner} \phi := (\psi \odot_{\lrcorner} u) \circ (\bar{v} \odot_{\lrcorner} \phi).
\end{array} \tag{3.59}
$$

Além disso, os produtos não-associativos entre elementos arbitrários da álgebra de Clifford serão completamente construídos nesse contexto.

$\triangleright$ **Exemplo 12:** Vamos calcular $\psi \circ_u^{\llcorner\llcorner} \phi$ e $\psi \circ_u^{\llcorner\lrcorner} \phi$ para $u = \mathbf{e}_6\mathbf{e}_7\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5$, $\bar{u} = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 - 2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4$,

$\psi = \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3$, e $\phi = \mathbf{e}_5\mathbf{e}_4$.

$$\begin{aligned}
(\psi \odot_{\llcorner} u) \quad \circ & \quad (\bar{u} \odot_{\llcorner} \phi) \\
= & \quad [\mathbf{e}_7\mathbf{e}_3 \odot_{\llcorner} (\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5)] \circ [(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 - 2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4) \odot_{\llcorner} \mathbf{e}_5\mathbf{e}_4] \\
= & \quad [\mathbf{e}_7 \circ (\mathbf{e}_3 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_6\mathbf{e}_7\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5) + 2\mathbf{e}_7 \circ (\mathbf{e}_3 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_4\mathbf{e}_5)] \circ \\
& \quad [-\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_7 \circ (\mathbf{e}_6 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_5\mathbf{e}_4)))) - 2\mathbf{e}_5 \circ (\mathbf{e}_4 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_5\mathbf{e}_4)] \\
= & \quad [\mathbf{e}_7 \circ ((((-\mathbf{e}_5 \circ \mathbf{e}_7) \circ \mathbf{e}_1) \circ \mathbf{e}_3) \circ \mathbf{e}_2) + 2\mathbf{e}_7 \circ (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_5)] \circ \\
& \quad [-\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_7 \circ (-\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_4)))) - 2\mathbf{e}_5 \circ (\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_4)] \\
= & \quad [\mathbf{e}_7 \circ (((\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1) \circ \mathbf{e}_3) \circ \mathbf{e}_2) + 2\mathbf{e}_7 \circ \mathbf{e}_7)] \circ [-\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_7 \circ (-\mathbf{e}_1)))) - 2\mathbf{e}_5 \circ \mathbf{e}_5)] \\
= & \quad [\mathbf{e}_7 \circ (-\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2) - 2] \circ [-\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_5))) + 2] \\
= & \quad [\mathbf{e}_7 \circ (-\mathbf{e}_7) - 2] \circ [-\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (-\mathbf{e}_7)) + 2] = [1 - 2] \circ [-\mathbf{e}_2 \circ (-\mathbf{e}_2) + 2] \\
= & \quad [-1] \circ [-1 + 2] = [-1] \circ [1] = -1.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\psi \odot_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \odot_{\lrcorner} \phi) &= [\mathbf{e}_7\mathbf{e}_3 \odot_{\llcorner} (\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5)] \circ [(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 - 2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4) \odot_{\lrcorner} \mathbf{e}_5\mathbf{e}_4] \\
&= [-1] \circ [(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_5) \circ \mathbf{e}_4 - 2(\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_5) \circ \mathbf{e}_4] \\
&= [-1] \circ [(-\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_7 \circ (-\mathbf{e}_3))))) \circ \mathbf{e}_4 - 2(\mathbf{e}_5 \circ \mathbf{e}_2) \circ \mathbf{e}_4] \\
&= [-1] \circ [(-\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2))) \circ \mathbf{e}_4 - 2\mathbf{e}_4 \circ \mathbf{e}_4] \\
&= [-1] \circ [(-\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_6)) \circ \mathbf{e}_4 + 2] = [-1] \circ [(-\mathbf{e}_2 \circ (-\mathbf{e}_5)) \circ \mathbf{e}_4 + 2] \\
&= [-1] \circ [-\mathbf{e}_4 \circ \mathbf{e}_4 + 2] = [-1] \circ [1 + 2] = (-1) \circ (3) = -3.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$\triangleleft$

Este exemplo ilustra a importância da direção no produto-$\odot$, porque neste caso uma simples mudança na direção do produto resulta em valores diferentes para os mesmos dados iniciais.

Podemos escrever todos os produtos descritos ao longo das Eqs.(3.44-3.59) de uma maneira sintética e resumida:

$$\begin{aligned}
\circ^{\square\blacksquare}_{u,v} : \triangle \times \blacktriangle \quad &\to \quad \mathbb{O} \\
(\psi, \phi) \quad &\mapsto \quad (\psi \square u) \circ (\bar{v} \blacksquare \phi)
\end{aligned}$$

para todo $\psi \in \triangle$, $\phi \in \blacktriangle$ e $u, v \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$.

Segue daí as seguintes possibilidades:

(i) $\square$ e $\blacksquare$ podem ser iguais ou diferentes onde cada um assume um dos produtos: $\odot_{\llcorner}, \odot_{\lrcorner}, \bullet_{\llcorner}, \bullet_{\lrcorner}$;

(ii) u e v podem ser iguais ou diferentes mas sempre serão multivetores homogêneos de Clifford;

(iii) $\triangle$ e $\blacktriangle$ podem ser iguais ou diferentes onde cada um assume a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ ou a restrição desta ao espaço dos paravetores compreendida como os octonions.

Lembramos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é *associativa* se

$$(xy)z = x(yz) \quad \text{para todo } x, y, z \in \mathcal{A}$$

e que uma álgebra $\mathcal{A}$ é *alternativa* se para todo $x, y \in \mathcal{A}$ satisfaz as identidades

$$\begin{aligned}
(xx)y &= x(xy) \\
y(xx) &= (yx)x
\end{aligned}$$

conhecidas respectivamente como as *leis alternativas à esquerda e à direita*, veja Definição 5.

Claramente qualquer álgebra associativa é alternativa.

Assim como o *comutador* $[x, y] = xy - yx$ mede comutatividade numa álgebra $\mathcal{A}$, o *associador*

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz) \tag{3.62}$$

de quaisquer três elementos pode ser introduzido como um medidor de associatividade em $\mathcal{A}$. Assim a definição de álgebra alternativa pode ser reescrita como

$$(x, x, y) = (y, x, x) = 0 \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{A}$$

Note que o associador (x, y, z) é linear em cada argumento.

O associador (x_1, x_2, x_3) "alterna-se"no sentido de que, para qualquer permutação σ de $1, 2, 3$ temos $(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, x_{3\sigma}) = \epsilon(\sigma)(x_1, x_2, x_3)$. Para mostrar este resultado é suficiente provar

$$(x, y, z) = -(y, x, z) = (y, z, x) \quad \text{para todo } x, y, z \in \mathcal{A} \tag{3.63}$$

Mas

$$\begin{aligned} (x + y, x + y, z) &= (x, x, z) + (x, y, z) + (y, x, z) + (y, y, z) \\ &= (x, y, z) + (y, x, z) = 0 \end{aligned}$$

pela definição de álgebra alternativa. O resultado implica em $(x, y, z) = -(y, x, z)$. Similarmente $(y, z, x) = -(y, x, z)$. Com as novas identidades adquiridas em termos do associador temos

$$(x, y, x) = 0 \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{A}$$

isto é,

$$(xy)x = x(yx) \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{A} \tag{3.64}$$

De fato,

$$(x, y, x) = -(y, x, x) = -(x, x, y) = 0$$

A identidade na Eq.(3.64) é chamada de *lei flexível*. As álgebras de Lie, Jordan e alternativa são flexíveis [Sch95]. A forma linearizada da lei flexível é

$$(x, y, z) + (z, y, x) = 0 \quad \text{para } x, y, z \in \mathcal{A}$$

Um exemplo de álgebra alternativa é a álgebra dos octonions. Portanto, para $A, B \in \mathbb{O}$

$$(A \circ A) \circ B = A \circ (A \circ B) \tag{3.65}$$
$$(A \circ B) \circ A = A \circ (B \circ A) \tag{3.66}$$
$$(B \circ A) \circ A = B \circ (A \circ A) \tag{3.67}$$

► **Obs.10:** Sabendo que a álgebra dos octonions é alternativa podemos ter as identidades de Moufang em termos de octonions [Mou34, Dix94a, Sch95]. Assim, para $A, B, C \in \mathbb{O}$

$$(A \circ B \circ A) \circ C = A \circ (B \circ (A \circ C)) \tag{3.68}$$
$$C \circ (A \circ B \circ A) = ((C \circ A) \circ B) \circ A \tag{3.69}$$
$$(A \circ B) \circ (C \circ A) = A \circ (B \circ C) \circ A \tag{3.70}$$

Primeiramente provaremos a identidade de Moufang dada pela Eq.(3.68):

$$
\begin{aligned}
&(A\circ B\circ A)\circ C - A\circ(B\circ(A\circ C))\\
&= (A\circ B\circ A)\circ C - (A\circ B)\circ(A\circ C) + (A\circ B)\circ(A\circ C) - A\circ(B\circ(A\circ C))\\
&= (A\circ B, A, C) + (A, B, A\circ C) = -(A, A\circ B, C) - (A, A\circ C, B)\\
&= -(A\circ(A\circ B))\circ C + A\circ((A\circ B)\circ C) - (A\circ(A\circ C))\circ B + A\circ((A\circ C)\circ B)\\
&\overset{(3.65)}{=} -((A\circ A)\circ B)\circ C - ((A\circ A)\circ C)\circ B + A\circ((A\circ B)\circ C + (A\circ C)\circ B)\\
&= -((A\circ A), B, C) - ((A\circ A), C, B) - (A\circ A)\circ(B\circ C) - (A\circ A)\circ(C\circ B)\\
&+A\circ((A\circ B)\circ C + (A\circ C)\circ B)\\
&\overset{(3.63)}{=} A\circ[-A\circ(B\circ C) - A\circ(C\circ B) + (A\circ B)\circ C + (A\circ C)\circ B]\\
&= A\circ[(A, B, C) + (A, C, B)] = 0
\end{aligned}
$$

A identidade (3.69) é a relação recíproca. Finalmente, (3.68) implica em

$$
\begin{aligned}
&(A\circ C)\circ(B\circ A) - A\circ(C\circ B)\circ A\\
&= (A\circ C)\circ(B\circ A) - A\circ[C\circ(B\circ A)] + A\circ[C\circ(B\circ A)] - A\circ(C\circ B)\circ A\\
&= (A, C, B\circ A) + A\circ[C\circ(B\circ A) - (C\circ B)\circ A]\\
&= -(A, B\circ A, C) - A\circ(C, B, A)\\
&= -[A\circ(B\circ A)]\circ C + A\circ[(B\circ A)\circ C] - A\circ(C, B, A)\\
&\overset{(3.64)}{=} -(A\circ B\circ A)\circ C + A\circ[(B\circ A)\circ C - (C, B, A)]\\
&\overset{(3.68)}{=} -A\circ[B\circ(A\circ C)] + A\circ[(B\circ A)\circ C] - A\circ[(C\circ B)\circ A - C\circ(B\circ A)]\\
&= -A\circ[B\circ(A\circ C) - (B\circ A)\circ C + (C, B, A)]\\
&= -A\circ[-(B, A, C) + (C, B, A)] = 0
\end{aligned}
$$

A prova da identidade (3.69) segue o mesmo roteiro que a demostração da identidade (3.68), de fato

$$
\begin{aligned}
&-C\circ(A\circ B\circ A) + ((C\circ A)\circ B)\circ A\\
&= (C\circ A)\circ(B\circ A) - C\circ(A\circ B\circ A) + ((C\circ A)\circ B)\circ A - (C\circ A)\circ(B\circ A)\\
&= (C, A, B\circ A) + (C\circ A, B, A) = -(C, B\circ A, A) - (B, C\circ A, A)\\
&= -(C\circ(B\circ A))\circ A + C\circ((B\circ A)\circ A) - (B\circ(C\circ A)) + B\circ((C\circ A)\circ A)\\
&\overset{(3.67)}{=} C\circ(B\circ(A\circ A)) + B\circ(C\circ(A\circ A)) - (C\circ(B\circ A) + B\circ(C\circ A))\circ A\\
&= -(C\circ B)\circ(A\circ A) + C\circ(B\circ(A\circ A)) - (B\circ C)\circ(A\circ A) + B\circ(C\circ(A\circ A))\\
&+(C\circ B)\circ(A\circ A) + (B\circ C)\circ(A\circ A) - (C\circ(B\circ A) + B\circ(C\circ A))\circ A\\
&= C\circ(B\circ(A\circ A)) + B\circ(C\circ(A\circ A)) - (C\circ(B\circ A) + B\circ(C\circ A))\circ A\\
&\overset{(3.62)}{=} -(C, B, A\circ A) - (B, C, A\circ A) + (C\circ B)\circ(A\circ A) + (B\circ C)(A\circ A)\\
&-(C\circ(B\circ A) + B\circ(C\circ A))\circ A\\
&\overset{(3.62)}{=} -[-(C\circ B)\circ A - (B\circ C)\circ A + C\circ(B\circ A) + B\circ(C\circ A)]\circ A\\
&= -[-(C, B, A) - (B, C, A)] = 0.
\end{aligned}
$$

A identidade de Moufang (3.69) também é equivalente a

$$
\begin{aligned}
C\circ(A\circ B\circ A) &= [(C\circ A)\circ B]\circ A \\
C\circ[(A\circ B)\circ A] &\overset{(3.64)}{=} [(C\circ A)\circ B]\circ A \\
-C\circ[(A\circ B)\circ A] &= -[(C\circ A)\circ B]\circ A \\
[C\circ(A\circ B)]\circ A - C\circ[(A\circ B)\circ A] &= -[(C\circ A)\circ B]\circ A + [C\circ(A\circ B)]\circ A \\
(C, A\circ B, C) &= -(C,A,B)A
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

A forma linearizada de (3.71) é

$$(C, A\circ B, D) + (C, D\circ B, A) = -(C,A,B)\circ D - (C,D,B)\circ A, \quad \text{para todo } A,B,C,D\in\mathbb{O}.$$

No caso dos produtos $\bullet_\llcorner : \mathbb{O}\times\Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) \to \mathbb{O}$ e $\bullet_\lrcorner : \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})\times\mathbb{O}\to\mathbb{O}$, as identidades de Moufang não podem ser generalizadas unicamente se utilizando de conjugação e involução graduada. Exibimos dois contra-exemplos:

▷ **Exemplo 13:** Uma das identidades de Moufang para os octonions é expressa como

$$(A\circ B)\circ(C\circ A) = A\circ(B\circ C)\circ A, \quad A,B,C\in\mathbb{O}. \tag{3.72}$$

Suponha que uma generalização imediata pudesse ser realizada ingenuamente pela substituição do produto octonionico padrão pelo produto-$\bullet$,

$$(u\bullet_\lrcorner B\bullet_\llcorner u)\bullet C = u\bullet_\lrcorner (B\bullet(u\bullet_\lrcorner C)), \quad u\in\mathcal{C}\ell_{0,7}, \tag{3.73}$$

ou até mesmo $(u\bullet_\lrcorner B\bullet_\llcorner u)\bullet C = \widehat{u}\bullet_\lrcorner (B\bullet(u\bullet_\lrcorner C))$, $(u\bullet_\lrcorner B\bullet_\llcorner u)\bullet C = \bar{u}\bullet_\lrcorner (B\bullet(u\bullet_\lrcorner C))$, ou o produto acima com uma combinação da involução graduada e/ou conjugação de Clifford sobre u. Para uma fácil compreensão das expressões, a Eq.(3.73) é reescrita como

$$(u\bullet_\lrcorner B\bullet_\llcorner u)\circ C = u\bullet_\lrcorner (B\circ(u\bullet_\lrcorner C)), \quad u\in\mathcal{C}\ell_{0,7}, \tag{3.74}$$

uma vez que o produto-$\bullet$ entre octonions é idêntico ao produto-$\circ$. Tome $u=\mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4$, $B=\mathbf{e}_1$ e $C=\mathbf{e}_3$. Primeiramente,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4\bullet_\lrcorner \mathbf{e}_1\bullet_\llcorner \mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4)\circ\mathbf{e}_3 &= ((\mathbf{e}_2\circ(\mathbf{e}_7\circ\mathbf{e}_3))\bullet_\llcorner \mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4)\circ\mathbf{e}_3 = ((\mathbf{e}_2\circ(-\mathbf{e}_2))\bullet_\llcorner \mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4)\circ\mathbf{e}_3 \\
&= ((\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_7)\circ\mathbf{e}_4)\circ\mathbf{e}_3 = (-\mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_4)\circ\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_3 \\
&= -\mathbf{e}_4,
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

enquanto que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4\bullet_\lrcorner(\mathbf{e}_1\circ(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4\bullet_\lrcorner\mathbf{e}_3)) &= \mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4\bullet_\lrcorner(\mathbf{e}_1\circ(\mathbf{e}_2\circ(\mathbf{e}_7\circ(-\mathbf{e}_1)))) = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4\bullet_\lrcorner(\mathbf{e}_1\circ(\mathbf{e}_2\circ(-\mathbf{e}_5))) \\
&= \mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4\bullet_\lrcorner(\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_7\mathbf{e}_4\bullet_\lrcorner(-\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2\circ(\mathbf{e}_7\circ\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_5 \\
&= -\mathbf{e}_4.
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

Por outro lado, tomando $u=\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7$, $B=\mathbf{e}_2$ e $C=\mathbf{e}_1$, segue-se que:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7\bullet_\lrcorner\mathbf{e}_2\bullet_\llcorner\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7)\circ\mathbf{e}_1 &= ((\mathbf{e}_3\circ(\mathbf{e}_5\circ\mathbf{e}_3))\bullet_\llcorner\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7)\circ\mathbf{e}_1 = ((\mathbf{e}_3\circ(-\mathbf{e}_6))\bullet_\llcorner\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7)\circ\mathbf{e}_1 \\
&= (\mathbf{e}_5\bullet_\llcorner\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7)\circ\mathbf{e}_1 = ((-\mathbf{e}_6\circ\mathbf{e}_5)\circ\mathbf{e}_7)\circ\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_7)\circ\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_1 \\
&= -\mathbf{e}_6,
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

enquanto

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_1)) &= \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_5 \circ \mathbf{e}_5))) = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\mathbf{e}_2 \circ (-\mathbf{e}_3))\\ &= \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (-\mathbf{e}_7) = \mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_5 \circ (\mathbf{e}_7 \circ (-\mathbf{e}_7))) = \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_6 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Pode ser visto que para elementos distintos de $u \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ ambas as relações $(u \bullet_\lrcorner B \bullet_\llcorner u) \circ C = u \bullet_\lrcorner (B \circ (u \bullet_\lrcorner C))$ e $(u \bullet_\lrcorner B \bullet_\llcorner u) \circ C = -u \bullet_\lrcorner (B \circ (u \bullet_\lrcorner C))$ são obtidas. Essas duas últimas relações não podem ser satisfeitas simultaneamente por elementos com o mesmo grau em $\mathcal{C}\ell_{0,7}$, o mesmo para o produto dado pela Eq.(3.73) com alguma composição da involução graduada e/ou conjugação de Clifford sobre u. Usando o mesmo contra-exemplo pode-se mostrar que as outras identidades de Moufang não podem ser generalizadas usando-se somente conjugação de Clifford e involução graduada.$\triangleleft$

$\triangleright$ **Exemplo 14:** Além disso, as identidades de Moufang não podem ser generalizadas para os produtos $\odot_\llcorner$ e $\odot_\lrcorner$ definido nas Eqs.(3.32, 3.33) respectivamente. De fato, computando o produto $(u \odot_\llcorner B \odot_\llcorner u) \odot_\llcorner C$ e $u \odot_\llcorner (B \odot_\llcorner (u \odot_\llcorner C))$ para $u = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7$, $B = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6$ e $C = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7$ vem:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_\llcorner \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7) \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 &= (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_7 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6)) \odot_\llcorner \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7) \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7\\ &= (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_3 \circ ((\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_5) \circ \mathbf{e}_6)) \odot_\llcorner \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7) \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7\\ &= (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_6 \circ \mathbf{e}_6)) \odot_\llcorner \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7) \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7\\ &= (\mathbf{e}_1 \circ (-\mathbf{e}_3) \odot_\llcorner \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7) \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 = (-\mathbf{e}_4 \odot_\llcorner \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7) \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7\\ &= (-\mathbf{e}_4 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7) \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 = ((-\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3) \circ \mathbf{e}_7) \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7\\ &= \mathbf{e}_7 \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 = \mathbf{e}_7 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 = (-\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_5) \circ \mathbf{e}_7 = \mathbf{e}_4 \circ \mathbf{e}_7\\ &= -\mathbf{e}_6\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7)) &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_7 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7))))\\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_3 \circ ((-\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_5) \circ \mathbf{e}_7))))\\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_4 \circ \mathbf{e}_7))))\\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (-\mathbf{e}_6))))\\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_5)) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \odot_\llcorner \mathbf{e}_7)\\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_5 \circ (\mathbf{e}_6 \circ \mathbf{e}_7))) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_5 \circ \mathbf{e}_4))\\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner (\mathbf{e}_2 \circ (-\mathbf{e}_2)) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \odot_\llcorner 1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner 1\\ &= \mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (\mathbf{e}_7 \circ 1)) = \mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_7) = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2\\ &= \mathbf{e}_6\end{aligned}$$

$\triangleleft$

Analogamente, outro contra-exemplo com o produto $\odot_\lrcorner$ também pode ser apresentado para mostrar que as identidades de Moufang dadas pelas Eqs.(3.68, 3.69, 3.70), não são generalizadas neste contexto.◀

3.3 Produto Escalar Octonionico e a Base do Fibrado Tangente à S^7

Para $A, B \in \mathbb{O}$ o produto escalar entre dois octonions é definido como [Roo84, Dix94a, Lou01, Bae01]:

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}(\bar{A} \circ B + \bar{B} \circ A) = \frac{1}{2}(A \circ \bar{B} + B \circ \bar{A}).$$

Considerando um octonion de norma unitária $X = X^0 + X^a\mathbf{e}_a$, o quadrado de sua norma é dado por $\|X\|^2 = \langle X, X\rangle = (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2 = 1$, e os elementos

$\{\mathbf{e}_a \circ X\}$ constituem o fibrado referencial em S^7, obtido pela multiplicação à esquerda de $X \in S^7$ por uma base octonionica $\{\mathbf{e}_a\}$. Os elementos satisfazem as relações

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_a \circ X, \mathbf{e}_b \circ X \rangle &= \delta_{ab}, \qquad\qquad \langle \mathbf{e}_a \circ X, X \rangle = 0, &(3.79)\\ \langle \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \bullet\lrcorner\, X, X \rangle &= 0. &(3.80)\end{aligned}$$

No que diz respeito aos octonions $\mathbf{e}_a \circ X$, as Eqs.(3.79) nos dizem que estes vetores são ortogonais uns aos outros e mais, estes vetores residem no espaço tangente no ponto arbitrário $X \in S^7$, onde eles formam uma base ortonormal. Na Seção 3.4 as representações matriciais de $\{e_a \circ X\}$ são explicitamente construídas. Para mais detalhes veja [Roo84, Dix94a].

Note que o produto $\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \bullet\lrcorner\, X$ também apresenta uma representação matricial associada — na Seção 3.4 todas as representações são construídas, e algumas delas foram primeiramente listadas em [Dix94a] — e é possível provar que

$$\langle \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \bullet\lrcorner\, X, X \rangle = \langle \mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ X), X \rangle = \langle \mathbf{e}_b \circ X, \bar{\mathbf{e}_a} \circ X \rangle = -\langle \mathbf{e}_b \circ X, \mathbf{e}_a \circ X \rangle = 0, \quad \forall a, b = 1, 2, \ldots, 7,\ a \neq b,$$

onde a Eq.(3.79) é empregada na última equação, i.e., $\mathbf{e}_a \circ X$ é uma base para o espaço tangente num ponto arbitrário em S^7. É fácil ver tal propriedade, em particular quando as propriedades no Apêndice A são levadas em conta.

As Eqs.(3.79) e (3.80) também podem ser demostradas facilmente computando-se todas possibilidades para todos $a, b = 1, 2, \ldots, 7$, $a \neq b$, mostrando que a Eq.(3.79) relaciona um conjunto de elementos ortogonais a $X \in S^7$ para $a \neq b$ e então uma base para o espaço tangente é obtida.

A fim de fazer ilustrações, no Apêndice A casos particulares das Eqs.(3.79) são explicitamente demonstrados. Em geral, para $a \neq b \neq c$ temos

$$\langle \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \mathbf{e}_c \bullet\lrcorner\, X, X \rangle \neq 0. \tag{3.81}$$

De fato, com relação ao elemento $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, segue-se

$$
\begin{aligned}
& \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \bullet_\lrcorner X, X\rangle \\
= \; & 1/2[(\overline{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \bullet_\lrcorner X}) \circ X + \bar{X} \circ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \bullet_\lrcorner X)] \\
= \; & 1/2[(+X^0\mathbf{e}_5 + X^1\mathbf{e}_7 - X^2\mathbf{e}_4 + X^3\mathbf{e}_6 - X^4\mathbf{e}_2 - X^5 + X^6\mathbf{e}_3 + X^7\mathbf{e}_1) \circ \\
& (+X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) + \\
& (+X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7) \circ \\
& (-X^0\mathbf{e}_5 - X^1\mathbf{e}_7 + X^2\mathbf{e}_4 - X^3\mathbf{e}_6 + X^4\mathbf{e}_2 - X^5 - X^6\mathbf{e}_3 - X^7\mathbf{e}_1)] \\
= \; & 1/2(+(X^0)^2\mathbf{e}_5 - X^0X^1\mathbf{e}_7 + X^0X^2\mathbf{e}_4 - X^0X^3\mathbf{e}_6 - X^0X^4\mathbf{e}_2 - X^0X^5 + X^0X^6\mathbf{e}_3 + X^0X^7\mathbf{e}_1 \\
& +X^1X^0\mathbf{e}_7 + (X^1)^2\mathbf{e}_5 + X^1X^2\mathbf{e}_3 - X^1X^3\mathbf{e}_2 + X^1X^4\mathbf{e}_6 - X^1X^5\mathbf{e}_1 - X^1X^6\mathbf{e}_4 - X^1X^7 \\
& -X^2X^0\mathbf{e}_4 - X^2X^1\mathbf{e}_3 + (X^2)^2\mathbf{e}_5 + X^2X^3\mathbf{e}_1 + X^2X^4 - X^2X^5\mathbf{e}_2 - X^2X^6\mathbf{e}_7 + X^2X^7\mathbf{e}_6 \\
& +X^3X^0\mathbf{e}_6 + X^3X^1\mathbf{e}_2 - X^3X^2\mathbf{e}_1 + (X^3)^2\mathbf{e}_5 - X^3X^4\mathbf{e}_7 - X^3X^5\mathbf{e}_3 - X^3X^6 + X^3X^7\mathbf{e}_4 \\
& -X^4X^0\mathbf{e}_2 + X^4X^1\mathbf{e}_6 + X^4X^2 - X^4X^3\mathbf{e}_7 - (X^4)^2\mathbf{e}_5 + X^4X^5\mathbf{e}_4 - X^4X^6\mathbf{e}_1 + X^4X^7\mathbf{e}_3 \\
& -X^5X^0 - X^5X^1\mathbf{e}_1 - X^5X^2\mathbf{e}_2 - X^5X^3\mathbf{e}_3 - X^5X^4\mathbf{e}_4 - (X^5)^2\mathbf{e}_5 - X^5X^6\mathbf{e}_6 - X^5X^7\mathbf{e}_7 \\
& +X^6X^0\mathbf{e}_3 - X^6X^1\mathbf{e}_4 - X^6X^2\mathbf{e}_7 - X^6X^3 + X^6X^4\mathbf{e}_1 + X^6X^5\mathbf{e}_6 - (X^6)^2\mathbf{e}_5 + X^6X^7\mathbf{e}_2 \\
& +X^7X^0\mathbf{e}_1 - X^7X^1 + X^7X^2\mathbf{e}_6 + X^7X^3\mathbf{e}_4 - X^7X^4\mathbf{e}_3 + X^7X^5\mathbf{e}_7 - X^7X^6\mathbf{e}_2 - (X^7)^2\mathbf{e}_5 \\
& -(X^0)^2\mathbf{e}_5 - X^0X^1\mathbf{e}_7 + X^0X^2\mathbf{e}_4 - X^0X^3\mathbf{e}_6 + X^0X^4\mathbf{e}_2 - X^0X^5 - X^0X^6\mathbf{e}_3 - X^0X^7\mathbf{e}_1 \\
& +X^1X^0\mathbf{e}_7 - (X^1)^2\mathbf{e}_5 + X^1X^2\mathbf{e}_3 - X^1X^3\mathbf{e}_2 - X^1X^4\mathbf{e}_6 + X^1X^5\mathbf{e}_1 + X^1X^6\mathbf{e}_4 - X^1X^7 \\
& -X^2X^0\mathbf{e}_4 - X^2X^1\mathbf{e}_3 - (X^2)^2\mathbf{e}_5 + X^2X^3\mathbf{e}_1 + X^2X^4 + X^2X^5\mathbf{e}_2 + X^2X^6\mathbf{e}_7 - X^2X^7\mathbf{e}_6 \\
& +X^3X^0\mathbf{e}_6 + X^3X^1\mathbf{e}_2 - X^3X^2\mathbf{e}_1 - (X^3)^2\mathbf{e}_5 + X^3X^4\mathbf{e}_7 + X^3X^5\mathbf{e}_3 - X^3X^6 - X^3X^7\mathbf{e}_4 \\
& +X^4X^0\mathbf{e}_2 - X^4X^1\mathbf{e}_6 + X^4X^2 + X^4X^3\mathbf{e}_7 + (X^4)^2\mathbf{e}_5 + X^4X^5\mathbf{e}_4 - X^4X^6\mathbf{e}_1 + X^4X^7\mathbf{e}_3 \\
& -X^5X^0 + X^5X^1\mathbf{e}_1 + X^5X^2\mathbf{e}_2 + X^5X^3\mathbf{e}_3 - X^5X^4\mathbf{e}_4 + (X^5)^2\mathbf{e}_5 - X^5X^6\mathbf{e}_6 - X^5X^7\mathbf{e}_7 \\
& -X^6X^0\mathbf{e}_3 + X^6X^1\mathbf{e}_4 + X^6X^2\mathbf{e}_7 - X^6X^3 + X^6X^4\mathbf{e}_1 + X^6X^5\mathbf{e}_6 + (X^6)^2\mathbf{e}_5 + X^6X^7\mathbf{e}_2 \\
& -X^7X^0\mathbf{e}_1 - X^7X^1 - X^7X^2\mathbf{e}_6 - X^7X^3\mathbf{e}_4 - X^7X^4\mathbf{e}_3 + X^7X^5\mathbf{e}_7 - X^7X^6\mathbf{e}_2 + (X^7)^2\mathbf{e}_5) \\
= \; & 2(-X^0X^5 - X^1X^7 + X^2X^4 - X^3X^6).
\end{aligned}
$$

3.4 Representações Matriciais do Produto-$\bullet$

A álgebra dos octonions não pode ser representada pela álgebra das matrizes por se tratar de uma álgebra não-associativa, fato este já conhecido [Dix94a]. Entretanto, as álgebras adjuntas das ações à esquerda e à direita num octonion arbitrário são associativas. No nosso caso, este fato é consumado pelo produto-$\bullet$ à direita e à esquerda, definido nas Eqs.(3.21,3.22) respectivamente.

O principal objetivo desta Seção é evidenciar a representação matricial para as ações à esquerda dos octonions no nosso formalismo[5]. As matrizes abaixo geram $\mathcal{M}(8,\mathbb{R})$ e todas as representações $u \bullet_\lrcorner X$ para $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$. De fato, o dual de Hodge em $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ pode ser expresso como

$$\star u = \tilde{u}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7.$$

Portanto, a fim de gerar as matrizes associadas ao conjunto

$$\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7, \mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h\}$$

[5] De fato, em [Dix94a] foram exibidas as representações matriciais para as ações à esquerda e à direita dos otonions calculando — em sua notação — $\mathbf{e}_{La}, \mathbf{e}_{Lab}, \mathbf{e}_{Labc}$, e também $\mathbf{e}_{Ra}, \mathbf{e}_{Rab}, \mathbf{e}_{Rabc}$, para octonions provenientes das regras $\mathbf{e}_a\mathbf{e}_{a+1} = \mathbf{e}_{a+5 \mod 7}$ e $\mathbf{e}_a\mathbf{e}_{a+1} = \mathbf{e}_{a+3 \mod 7}$.

— que atua em X octonion pelo produto-$\bullet$ — precisamos considerar somente a correspondência respectiva a $\{\star 1, \star \mathbf{e}_a, \star \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b, \star \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\}$ nesta ordem. Além disso, o conjunto $\{1, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\}$ possui dimensão 64.

Um octonion $X = X^0 + X^a\mathbf{e}_a$ pode ser escrito como $(X^0, X^1, \ldots, X^7)^T$ representando a estrutura do espaço vetorial subjacente. A seguir apresentamos o produto octonionico pela ação das matrizes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \circ (X) &= \mathbf{e}_1 \circ (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \\
&= X^0\mathbf{e}_1 - X^1 + X^2\mathbf{e}_6 + X^3\mathbf{e}_4 - X^4\mathbf{e}_3 + X^5\mathbf{e}_7 - X^6\mathbf{e}_2 - X^7\mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ X^5 \\ X^6 \\ X^7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos todas as matrizes que representam a ação dos elementos da base de $\Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$ sobre um octonion arbitrário

$$\mathbf{e}_2 \circ (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 \circ (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_4 \circ (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_5 \circ (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_6 \circ (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_7 \circ (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abaixo apresentamos explicitamente a ação de todos os elementos da base de $\Lambda_2(\mathbb{R}^{0,7})$ agindo sobre um octonion arbitrário, com o produto-$\bullet_\lrcorner$ indicando que as matrizes são provenientes de ações à esquerda

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \bullet_\lrcorner (X) \\
= \; & \mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_2 \circ (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7)) \\
= \; & \mathbf{e}_1 \circ (X^0\mathbf{e}_2 - X^1\mathbf{e}_6 - X^2 + X^3\mathbf{e}_7 + X^4\mathbf{e}_5 - X^5\mathbf{e}_4 + X^6\mathbf{e}_1 - X^7\mathbf{e}_3) \\
= \; & X^0\mathbf{e}_6 + X^1\mathbf{e}_2 - X^2\mathbf{e}_1 - X^3\mathbf{e}_5 + X^4\mathbf{e}_7 + X^5\mathbf{e}_3 - X^6 - X^7\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ X^5 \\ X^6 \\ X^7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De modo similar, segue todas as matrizes da representação da ação dos bivetores $\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b$ sobre um octonion arbitrário:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_5 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_6 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_4\mathbf{e}_5 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_4\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_6\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

Para finalizar, faremos a representação matricial dos trivetores $\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ agindo sobre um octonion arbitrário.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \bullet_{\lrcorner} (X) \\
= \; & \mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_3 \circ (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7))) \\
= \; & \mathbf{e}_1 \circ (\mathbf{e}_2 \circ (X^0\mathbf{e}_3 - X^1\mathbf{e}_4 - X^2\mathbf{e}_7 - X^3 + X^4\mathbf{e}_1 + X^5\mathbf{e}_6 - X^6\mathbf{e}_5 + X^7\mathbf{e}_2)) \\
= \; & \mathbf{e}_1 \circ (X^0\mathbf{e}_7 - X^1\mathbf{e}_5 + X^2\mathbf{e}_3 - X^3\mathbf{e}_2 - X^4\mathbf{e}_6 + X^5\mathbf{e}_1 + X^6\mathbf{e}_4 - X^7) \\
= \; & -X^0\mathbf{e}_5 - X^1\mathbf{e}_7 + X^2\mathbf{e}_4 - X^3\mathbf{e}_6 + X^4\mathbf{e}_2 - X^5 - X^6\mathbf{e}_3 - X^7\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0\\ X^1\\ X^2\\ X^3\\ X^4\\ X^5\\ X^6\\ X^7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

E com cálculos semelhantes é possível obter

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_7 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_4\mathbf{e}_6 \bullet_{\lrcorner} (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ -1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_6 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5\mathbf{e}_6 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_4\mathbf{e}_5\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_4\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_5\mathbf{e}_6\mathbf{e}_7 \bullet_\lrcorner (\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O Teorema Principal

4

Quando vamos do espaço $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{0,7}$ subjacente aos octonions para toda a álgebra exterior, imersa na álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,7}$, temos que responder a questão sobre a natureza da conjugação octonionica nesta extensão algébrica. É bem sabido que a conjugação octonionica é um anti-automorfismo como visto anteriormente. Mostraremos na Eq.(4.12), dentro do formalismo apresentado, que tal anti-automorfismo, pode ser expresso através do produto-u a partir de um elemento $\alpha_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{0,7})$, como será ilustrado no Lema 8.

Este trabalho traz uma generalização não feita por [Dix94a], [Ced95] e outros, que consideraram apenas o produto-X para elementos da base octonionica, onde generalizamos para elementos de toda álgebra exterior subjacente à $\mathcal{C}\ell_{0,7}$, resultado esse que pode trazer várias aplicações interessantes e novas abordagens para problemas não resolvidos.

4.1 Propriedades Generalizadas de Estruturas Não-Associativas em S^7

Daqui em diante considere um elemento homogêneo $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_j} \in \Lambda_j(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$, pelas razões explicitadas na **Obs.5**.

▶ **Lema 4:** *Os seguintes elementos de* $\Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1/8(1 + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 + \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5),\\
P_1 &= 1/8(1 - \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 + \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5),\\
P_2 &= 1/8(1 - \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 + \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5),\\
P_3 &= 1/8(1 - \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 - \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5),\\
P_4 &= 1/8(1 + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 - \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5),\\
P_5 &= 1/8(1 - \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 - \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5),\\
P_6 &= 1/8(1 + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 - \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 + \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5),\\
P_7 &= 1/8(1 + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 - \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

[Dix94a], para $a = 0, 1, \ldots, 7$, *são* $\bullet$*-idempotentes.* ◀

De fato, podemos mostrar por verificação imediata que $P_aP_b = \delta_{ab}P_a$ ($\delta_{ab} = 1$ se $a = b$, e 0 caso contrário), onde o produto de Clifford é denotado por justaposição. Assim como os P_a são elementos da álgebra de Clifford, a relação $P_aP_b = \delta_{ab}P_a$ é compreendida do ponto de vista de uma $\bullet$-ação sobre octonions, ou uma $\odot$-ação sobre os elementos da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,7}$, como definido nas Eqs.(3.21, 3.22, 3.32, 3.33). Nesse sentido os P_a são $\bullet$-idempotentes, satisfazendo $\sum_{a=0}^{7} P_a = 1$, e $\{P_a\}_{a=0}^{7}$ é um conjunto completo de $\bullet$-idempotentes ortogonais [Dix94a].

Dado um $a \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ fixo, porém arbitrário, considere o respectivo idempotente P_a. Os sinais positivos na combinação linear dos elementos em $\Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ acima aparecem somente nos termos $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$, quando um dos indices é igual a a.

Além disso, defina

$$\alpha_a = 2P_a - 1 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7}). \tag{4.2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_6 \bullet_\lrcorner X &= (2P_0 - 1)(2P_1 - 1)(2P_2 - 1)(2P_6 - 1) \bullet_\lrcorner X \\ &= (4P_0P_1 - 2P_0 - 2P_1 + 1)(4P_2P_6 - 2P_2 - 2P_6 + 1) \bullet_\lrcorner X \\ &= (-2P_0 - 2P_1 + 1)(-2P_2 - 2P_6 + 1) \bullet_\lrcorner X \\ &= (-2(P_0 + P_1 + P_2 + P_6) + 1) \bullet_\lrcorner X. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por outro lado, é imediato das expressões (4.1) que

$$(P_0 + P_1 + P_2 + P_6) \bullet_\lrcorner X = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \bullet_\lrcorner X$$

e consequentemente a Eq.(4.3) pode ser escrita como[1]

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_6 = -\mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1. \tag{4.4}$$

Mais geralmente, para (a, b, c) triplas quaternionicas da Eq.(3.9) pode se mostrar que

$$\alpha_0\alpha_a\alpha_b\alpha_c = -\mathbf{e}_c\mathbf{e}_b\mathbf{e}_a \tag{4.5}$$

▶ **Lema 5:** *O elemento $\alpha_0 = 2P_0 - 1 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ — como definido na Eq.(4.2) — é uma involução, no sentido de sua ação sobre os octonions, isto é, $\alpha_0^2 \bullet_\lrcorner X = 1 \bullet_\lrcorner X = X$, $\forall X \in \mathbb{O}$. Além disso, $\alpha_0P_0 \bullet_\lrcorner X = P_0 \bullet_\lrcorner X$ e $P_0\alpha_0 \bullet_\lrcorner X = P_0 \bullet_\lrcorner X$.* ◀

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 \bullet_\lrcorner X &= (2P_0 - 1)^2 \bullet_\lrcorner X = (4P_0^2 - 4P_0 + 1) \bullet_\lrcorner X \\ &= (4P_0 - 4P_0 + 1) \bullet_\lrcorner X = 1 \bullet_\lrcorner X = 1 \circ X = X, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\alpha_0P_0 \bullet_\lrcorner X = ((2P_0 - 1)P_0) \bullet_\lrcorner X = (2P_0^2 - P_0) \bullet_\lrcorner X = (2P_0 - P_0) \bullet_\lrcorner X = P_0 \bullet_\lrcorner X, \tag{4.7}$$

$$P_0\alpha_0 \bullet_\lrcorner X = (P_0(2P_0 - 1)) \bullet_\lrcorner X = (2P_0^2 - P_0) \bullet_\lrcorner X = (2P_0 - P_0) \bullet_\lrcorner X = P_0 \bullet_\lrcorner X. \tag{4.8}$$

□

Portanto, a partir das Eqs.(4.7) e (4.8) acima, podemos afirmar imediatamente que

$$\alpha_0P_0\alpha_0 \bullet_\lrcorner X = P_0 \bullet_\lrcorner X$$

Dado $X = X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + \cdots + X^7\mathbf{e}_7 \in \mathbb{O}$ com $X^0, \ldots, X^7 \in \mathbb{R}$, temos o seguinte resultado

$$P_0 \bullet_\lrcorner X = X^0, \tag{4.9}$$

obtido imediatamente das Eqs.(4.1). De maneira mais geral pode-se mostrar que $P_a \bullet_\lrcorner X = X^a\mathbf{e}_a$ pelo lema a seguir [Dix94a]

[1] Na verdade a equação representa a ação de $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_6$ sobre um octonion arbitrário e é equivalente a ação de $-\mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ sobre o mesmo octonion, em outras palavras, $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_6 \bullet_\lrcorner X = -\mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \bullet_\lrcorner X$, para todo $X \in \mathbb{O}$.

▶ **Lema 6:** *Seja P_a como na Eq.(4.1), para todo $X \in \mathbb{O}$ com $X^a \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$\boxed{P_a \bullet\lrcorner\, X = X^a \mathbf{e}_a} \tag{4.10}$$

◀

Demonstração: Vide Apêndice B.□

No Lema 6 acima quando escrevemos $X^a\mathbf{e}_a$ não estamos nos referindo a convenção da soma citada anteriormente. Portanto $X^a\mathbf{e}_a$ é de fato $X^a\mathbf{e}_a$.

É evidente que P_a é uma projeção da estrutura subjacente à álgebra dos octonions enquanto espaço vetorial, pois $P_a^2 = P_a$ e P_a projeta X na direção de $\mathbf{e}_a$, isto é, $X^a\mathbf{e}_a$.

▶ **Lema 7:** *O elemento $\alpha_0 = 2P_0 - 1 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ é uma conjugação octonionica com respeito ao produto-$\bullet$* ◀

Demonstração: Com efeito, dado $X \in \mathbb{O}$

$$\alpha_0 \bullet\lrcorner\, X = (2P_0 - 1) \bullet\lrcorner\, X = 2P_0 \bullet\lrcorner\, X - X = 2X^0 - X = X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - \cdots - X^7\mathbf{e}_7 = \bar{X} \tag{4.11}$$

□

▶ **Lema 8:** *A forma diferencial $\alpha_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ é um anti-automorfismo involutivo com respeito ao produto-$\bullet$* ◀

Demonstração: De fato, dados $X, Y \in \mathbb{O}$

$$\alpha_0 \bullet\lrcorner\, (X \circ Y) = \overline{(X \circ Y)} = \bar{Y} \circ \bar{X} = (\alpha_0 \bullet\lrcorner\, Y) \circ (\alpha_0 \bullet\lrcorner\, X) \tag{4.12}$$

□

▶ **Proposição 6:** *Com relação a forma diferencial $\alpha_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$, para quaisquer $A, X \in \mathbb{O}$ temos*

$$\boxed{(\alpha_0 A \alpha_0) \bullet\lrcorner\, X = X \circ \bar{A}}$$

◀

Demonstração:

$$\begin{aligned} (\alpha_0 A \alpha_0) \bullet\lrcorner\, X &\overset{(3.22)}{=} (\alpha_0 A) \bullet\lrcorner\, (\alpha_0 \bullet\lrcorner\, X) = (\alpha_0 A) \bullet\lrcorner\, \bar{X} \overset{(3.22)}{=} \alpha_0 \bullet\lrcorner\, (A \circ \bar{X}) \\ &= (\alpha_0 \bullet\lrcorner\, \bar{X}) \circ (\alpha_0 \bullet\lrcorner\, A) = X \circ \bar{A}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

□

Como um último resultado que será usado nas demonstrações subsequentes, apresentamos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 P_1 \mathbf{e}_6 &= 1/8(\mathbf{e}_2(1 - \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 + \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5)\mathbf{e}_6) \\ &= -1/8(\mathbf{e}_6(1 + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 + \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5)\mathbf{e}_2) \\ &= -\mathbf{e}_6 P_0 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

▷ **Corolário 1:** Seja P_a como na Eq.(4.1). Então $\forall a = 1, 2, \ldots, 7$ e $\forall X \in \mathbb{O}$ é possível concluírmos que

$$\boxed{P_a \bullet\lrcorner\, X = (\mathbf{e}_a P_0 \bar{\mathbf{e}_a}) \bullet\lrcorner\, X}$$

◁

Veja que a Eq.(4.12) pode ser generalizada para elementos homogêneos $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$ pelo seguinte resultado

▶ **Proposição 7:** *Seja* $\alpha_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$. *Para todo* $X \in \mathbb{O}$ *e para todo* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$ *segue-se*

$$\boxed{\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \bullet_\llcorner u) = \bar{u} \bullet_\lrcorner (\alpha_0 \bullet_\lrcorner X)} \tag{4.15}$$

◀

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \bullet_\llcorner u) &= \alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_k}) \\
&\overset{(3.21)}{=} \alpha_0 \bullet_\lrcorner ((\cdots((X \circ \mathbf{e}_{i_1}) \circ \mathbf{e}_{i_2})\cdots) \circ \mathbf{e}_{i_k}) \\
&= (\alpha_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_{i_k}) \circ (\alpha_0 \bullet_\lrcorner ((\cdots((X \circ \mathbf{e}_{i_1}) \circ \mathbf{e}_{i_2})\cdots) \circ \mathbf{e}_{i_{k-1}})) \\
&= (\alpha_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_{i_k}) \circ ((\alpha_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_{i_{k-1}}) \circ (\alpha_0 \bullet_\lrcorner ((\cdots((X \circ \mathbf{e}_{i_1}) \circ \mathbf{e}_{i_2})\cdots) \circ \mathbf{e}_{i_{k-2}}))) \\
&= (\alpha_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_{i_k}) \circ ((\alpha_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_{i_{k-1}}) \circ (\cdots((\alpha_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_{i_2}) \circ ((\alpha_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_{i_1}) \circ (\alpha_0 \bullet_\lrcorner X)))\cdots)) \\
&= \overline{\mathbf{e}_{i_k}} \circ (\overline{\mathbf{e}_{i_{k-1}}} \circ (\cdots(\overline{\mathbf{e}_{i_2}} \circ (\overline{\mathbf{e}_{i_1}} \circ \bar{X}))\cdots)) \\
&= \bar{u} \bullet_\lrcorner \bar{X} = \bar{u} \bullet_\lrcorner (\alpha_0 \bullet_\lrcorner X)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

□

Note que na Eq.(4.16) temos a conjugação de Clifford herdada através da ação de α_0 e não da conjugação octonionica. Além disso, podemos escrever $\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \bullet_\lrcorner u)$ de maneira concisa em termos do produto-$\odot$ pondo $(\alpha_0 X) \odot_\llcorner u$. Portanto, segue-se das Eqs.(4.6,4.16) que

$$X \bullet_\llcorner u = (\alpha_0\alpha_0 X) \bullet_\llcorner u = (\alpha_0\alpha_0 X) \odot_\llcorner u = \alpha_0 \bullet_\lrcorner (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \bullet_\llcorner u)) = \alpha_0 \bullet_\lrcorner (\bar{u} \bullet_\lrcorner \bar{X})$$

Essa expressão é de grande importância na demonstração do Teorema 19 e suas generalizações, que é de fato o objetivo deste capítulo. Podemos ainda generalizar a Proposição 7 para $u, v \in \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$ elementos homogêneos,

$$\alpha_0 \bullet_\lrcorner (u \odot v) = \bar{v} \odot \bar{u}$$

▶ **Lema 9:** *Seja* $\alpha_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$. *Para todo* $X \in \mathbb{O}$ *e para todo* $u \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$ *temos*

$$\boxed{(X\alpha_0) \odot_\llcorner u = (\alpha_0 u) \bullet_\lrcorner \bar{X}}$$

◀

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(X\alpha_0) \odot_\llcorner u &= X \circ (\alpha_0 \odot u) = X \bullet_\llcorner \bar{u} = (\alpha_0 \bullet_\lrcorner \bar{X}) \circ (\alpha_0 \odot u) \\
&= \alpha_0 \bullet_\lrcorner (u \bullet_\lrcorner \bar{X}) = (\alpha_0 u) \odot_\lrcorner \bar{X} = (\alpha_0 u) \bullet_\lrcorner \bar{X}
\end{aligned}$$

□

▶ **Lema 10:** *Seja* $\alpha_a \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ *— como definido na Eq.(4.2) — com* $a \in \{1, \ldots, 7\}$*. Então, para todo* $X \in \mathbb{O}$ *temos*

$$\boxed{\alpha_a \bullet\lrcorner\, (X \circ \bar{\mathbf{e}_a}) = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_a}} \tag{4.17}$$

◀

Demonstração: Vide Apêndice C.□

Só para recordar, reiteramos que o produto de Clifford está sendo denotado por justaposição. O resultado a seguir pode ser visto como um medidor da falta de associatividade envolvida se compararmos o resultado ao associador definido pela Eq.(3.62).

▶ **Teorema 18:**

(a) Seja $\alpha_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$*. Dados* $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b \in \mathbb{O}$ *com* $\mathbf{e}_0 = 1$ *sendo a identidade, para todo* $X \in \mathbb{O}$ *tem-se*

$$\boxed{(\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_b) \circ X = (\alpha_0 \bullet\lrcorner\, (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_0 - (\alpha_0 \bullet\lrcorner\, (X \circ \bar{\mathbf{e}_0})) \circ \bar{\mathbf{e}_b} + (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0}$$

(b) Seja $\alpha_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$*. Dados* $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b \in \mathbb{O}$*, para todo* $X \in \mathbb{O}$ *tem-se*

$$\boxed{(\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ X = (\alpha_0 \bullet\lrcorner\, (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_a - (\alpha_0 \bullet\lrcorner\, (X \circ \bar{\mathbf{e}_a})) \circ \bar{\mathbf{e}_b} + (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_a}$$

◀

Demonstração:

(a)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_b) \circ X &= \mathbf{e}_b \circ X \\
&\overset{(4.12)}{=} (\alpha_0 \bullet_\lrcorner \bar{\mathbf{e}}_b) \circ (\alpha_0 \bullet_\lrcorner \bar{X}) \\
&\overset{(4.12)}{=} \alpha_0 \bullet_\lrcorner (\bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}}_b) \\
&\overset{(4.17)}{=} \alpha_0 \bullet_\lrcorner (\alpha_b \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_b)) \\
&= -(2P_0 + 2P_b - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_b) \\
&= -(2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_b) - (2P_b - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_b) \\
&\overset{(4.17)}{=} -(2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_b) - ((2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner X) \circ \bar{\mathbf{e}}_b \\
&= ((2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_0 - ((2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \bar{\mathbf{e}}_b \\
&= ((2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_0 - 1/2(X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 \\
&\quad -((2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \bar{\mathbf{e}}_b - 1/2(X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 + (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 \\
&= ((2P_0 - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_0 - ((2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \bar{\mathbf{e}}_b \\
&\quad +1/2(X \circ \bar{\mathbf{e}}_b) \circ \mathbf{e}_0 + (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 \\
&\overset{(4.2)}{=} (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_0 - ((2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \bar{\mathbf{e}}_b \\
&\quad +1/2(X \circ \bar{\mathbf{e}}_0) \circ \bar{\mathbf{e}}_b + (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 \\
&= (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_0 - ((2P_0 - 1/2) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \bar{\mathbf{e}}_b \\
&\quad -(-1/2(X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \bar{\mathbf{e}}_b + (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 \\
&= (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_0 - ((2P_0 - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \bar{\mathbf{e}}_b + (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 \\
&\overset{(4.2)}{=} (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_0 - (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \bar{\mathbf{e}}_b + (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0
\end{aligned}
$$

(b) Sem perda de generalidade podemos fazer $\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_6$ para nos utilizarmos das Eqs.(4.4, 4.5).

$$
\begin{aligned}
& -(\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_6) \circ X = -\mathbf{e}_1 \circ X = -(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_6\mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \bullet_{\lrcorner} X \\
\overset{(4.4)}{=}\; & (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_6\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_6) \bullet_{\lrcorner} X = (\alpha_0\mathbf{e}_2\alpha_0\alpha_1\mathbf{e}_6\alpha_0) \bullet_{\lrcorner} X \\
=\; & [\alpha_0\mathbf{e}_2(1 - 2P_0 - 2P_1)\mathbf{e}_6\alpha_0] \bullet_{\lrcorner} X \\
=\; & \{\alpha_0\mathbf{e}_2\,[(1/2 - 2P_0) + (1/2 - 2P_1)]\,\mathbf{e}_6\alpha_0\} \bullet_{\lrcorner} X \\
=\; & \{\alpha_0\mathbf{e}_2\,(1/2 - 2P_0)\,\mathbf{e}_6\alpha_0 + \alpha_0\mathbf{e}_2\,(1/2 - 2P_1)\,\mathbf{e}_6\alpha_0\} \bullet_{\lrcorner} X \\
\overset{(4.14)}{=}\; & \{\alpha_0\mathbf{e}_2\,(1/2 - 2P_0)\,\mathbf{e}_6\alpha_0 - \alpha_0\mathbf{e}_6\,(1/2 - 2P_0)\,\mathbf{e}_2\alpha_0\} \bullet_{\lrcorner} X \\
\overset{(4.2)}{=}\; & \{\alpha_0\mathbf{e}_2\,(-1/2 - \alpha_0)\,\mathbf{e}_6\alpha_0 - \alpha_0\mathbf{e}_6\,(-1/2 - \alpha_0)\,\mathbf{e}_2\alpha_0\} \bullet_{\lrcorner} X \\
=\; & [\alpha_0\mathbf{e}_2\,(-1/2 - \alpha_0)\,\mathbf{e}_6\alpha_0] \bullet_{\lrcorner} X - [\alpha_0\mathbf{e}_6\,(-1/2 - \alpha_0)\,\mathbf{e}_2\alpha_0] \bullet_{\lrcorner} X \\
=\; & [\alpha_0\mathbf{e}_2\,(-1/2 - \alpha_0)] \bullet_{\lrcorner} (\mathbf{e}_6 \circ (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} X)) - [\alpha_0\mathbf{e}_6\,(-1/2 - \alpha_0)] \bullet_{\lrcorner} (\mathbf{e}_2 \circ (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} X)) \\
\overset{(4.12)}{=}\; & [\alpha_0\mathbf{e}_2\,(-1/2 - \alpha_0)] \bullet_{\lrcorner} (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6})) - [\alpha_0\mathbf{e}_6\,(-1/2 - \alpha_0)] \bullet_{\lrcorner} (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2})) \\
=\; & [\alpha_0\mathbf{e}_2\,(-1/2 - \alpha_0)\,\alpha_0] \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6}) - [\alpha_0\mathbf{e}_6\,(-1/2 - \alpha_0)\,\alpha_0] \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2}) \\
=\; & [\alpha_0\bar{\mathbf{e}_2}\,(1/2 + \alpha_0)\,\alpha_0] \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6}) - [\alpha_0\bar{\mathbf{e}_6}\,(1/2 + \alpha_0)\,\alpha_0] \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2}) \\
\overset{(4.6)}{=}\; & [\alpha_0\bar{\mathbf{e}_2}\,((1/2)\alpha_0 + 1)] \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6}) - [\alpha_0\bar{\mathbf{e}_6}\,((1/2)\alpha_0 + 1)] \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2}) \\
\overset{(3.22)}{=}\; & (\alpha_0\bar{\mathbf{e}_2}) \bullet_{\lrcorner} (((1/2)\alpha_0 + 1) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6})) - (\alpha_0\bar{\mathbf{e}_6}) \bullet_{\lrcorner} (((1/2)\alpha_0 + 1) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2})) \\
=\; & (\alpha_0\bar{\mathbf{e}_2}\alpha_0\alpha_0) \bullet_{\lrcorner} (((1/2)\alpha_0 + 1) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6})) - (\alpha_0\bar{\mathbf{e}_6}\alpha_0\alpha_0) \bullet_{\lrcorner} (((1/2)\alpha_0 + 1) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2})) \\
=\; & (\alpha_0\bar{\mathbf{e}_2}\alpha_0) \bullet_{\lrcorner} [\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (((1/2)\alpha_0 + 1) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6}))] - (\alpha_0\bar{\mathbf{e}_6}\alpha_0) \bullet_{\lrcorner} [\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (((1/2)\alpha_0 + 1) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2}))] \\
\overset{(4.13)}{=}\; & [\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (((1/2)\alpha_0 + 1) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6}))] \circ \mathbf{e}_2 - [\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (((1/2)\alpha_0 + 1) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2}))] \circ \mathbf{e}_6 \\
\overset{(3.22)}{=}\; & [[\alpha_0\,((1/2)\alpha_0 + 1)] \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6})] \circ \mathbf{e}_2 - [[\alpha_0\,((1/2)\alpha_0 + 1)] \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2})] \circ \mathbf{e}_6 \\
=\; & ((1/2 + \alpha_0) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_6})) \circ \mathbf{e}_2 - ((1/2 + \alpha_0) \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2})) \circ \mathbf{e}_6 \\
=\; & -(\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \mathbf{e}_6)) \circ \mathbf{e}_2 + (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2})) \circ \bar{\mathbf{e}_6} + 1/2((X \circ \bar{\mathbf{e}_6}) \circ \mathbf{e}_2 - (X \circ \bar{\mathbf{e}_2}) \circ \mathbf{e}_6) \\
\overset{(3.22)}{=}\; & -(\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \mathbf{e}_6)) \circ \mathbf{e}_2 + (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2})) \circ \bar{\mathbf{e}_6} + 1/2(X \bullet_{\llcorner} \bar{\mathbf{e}_6}\mathbf{e}_2 - X \bullet_{\llcorner} \bar{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_6) \\
=\; & -(\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \mathbf{e}_6)) \circ \mathbf{e}_2 + (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_2})) \circ \bar{\mathbf{e}_6} - (X \circ \mathbf{e}_6) \circ \mathbf{e}_2
\end{aligned}
$$

que conduz exatamente ao formalismo em [Dix94a]. Portanto, de acordo com as Eqs.(4.4, 4.5), em geral podemos repetir uma demonstração semelhante para provar para todo $a, b = 1, 2, \ldots, 7$ que vale

$$\boxed{(\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ X = (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_a - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_a})) \circ \bar{\mathbf{e}_b} + (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_a} \tag{4.18}$$

Note que uma demonstração análoga pode ser feita escolhendo-se $\mathbf{e}_a$ e $\mathbf{e}_b$ de maneira que $\alpha_0\alpha_a\alpha_b\alpha_c = -\mathbf{e}_c\mathbf{e}_b\mathbf{e}_a$, Eq.(4.5), onde (a, b, c) é uma tripla quaternionica, Eq.(3.9).

□

Ao provarmos para $u \in \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$ que

$$\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u = \rho\mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

onde $\rho = (-1)^{|u|(|u|-1)/2}$ podemos estender o Teorema 18 item (a) para um elemento homogêneo arbitrário $u \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$ tal como se segue:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ X &= (\rho\mathbf{e}_0(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})) \circ X \\
&= \rho\left[(\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_0})) \circ (\overline{1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}}) + (X \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})) \circ \mathbf{e}_0\right] \\
&= \rho\left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_0})) \circ (\overline{1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}})\right]
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

De maneira totalmente análoga, provando-se que

$$\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u = \lambda \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

com $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$ onde $|u|$ denota o grau de u, se $u \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$ então $|u| = k$, e utilizando-se do formalismo desenvolvido acima, resumido na Eq.(4.18), é possível estender o Teorema 18 (b) computando-se todas as possibilidades para um elemento homogêneo arbitrário $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ X &= (\lambda \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})) \circ X \\
&= \lambda \Big[(\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_a})) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} + (X \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})) \circ \mathbf{e}_a \Big] \\
&= \lambda \Big[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_a})) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \Big]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

▶ **Lema 11:**

(a) Dados $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \dots, 6$ *então*

$$\boxed{\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u = \rho \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}$$

onde $\rho = (-1)^{|u|(|u|-1)/2}$.

(b) Dados $\mathbf{e}_a \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \dots, 6$ *com* $\mathbf{e}_a \notin \{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}\}$ *ou* $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m\}$ *não sendo uma* $\mathbb{H}$*-tripla para* $\mathbf{e}_l \neq \mathbf{e}_m$ *e* $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m \in \{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_6}\}$, *então*

$$\boxed{\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u = \lambda \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}$$

onde $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$.

◀

Demonstração: Vide Apêndice D.□

▶ **Lema 12:**

(a) Dados $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \dots, 6$ *então*

$$\boxed{(\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} = \eta \mathbf{e}_0} \tag{4.21}$$

onde $\eta = (-1)^{|u|(r_{|u|} - r_{|u|-1}) + (8-|u|)(7-|u|)/2}$ *e* r_j *são os números de Radon-Hurwitz definidos pela seguinte tabela*

j	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
r_j	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*	*3*

e a relação de recorrência $r_{j+8} = r_j + 4$.

(b) Dados $\mathbf{e}_a \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \dots, 6$ *com* $\mathbf{e}_a \notin \{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}\}$ *ou* $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m\}$ *não sendo uma* $\mathbb{H}$*-tripla para* $\mathbf{e}_l \neq \mathbf{e}_m$ *e* $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m \in \{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_6}\}$*, então*

$$\boxed{(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} = \lambda \mathbf{e}_a} \tag{4.22}$$

onde $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$.

◄

Demonstração: Vide Apêndice E.□

► **Obs.11:** Note que o Lema 12 fornece duas involuções induzidas por u dentro dos octonions. Denotamos essas involuções por

$$\clubsuit_u^1(\mathbf{e}_0) := (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} = \eta \mathbf{e}_0$$
$$\dashv_u (\mathbf{e}_a) := (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} = \lambda \mathbf{e}_a$$

com $\clubsuit_u^1\clubsuit_u^1(\mathbf{e}_0) = \mathbf{e}_0$ e $\dashv_u\dashv_u (\mathbf{e}_a) = \mathbf{e}_a$.◄

Usando-se o item (b) do Lema 12 enunciamos o seguinte resultado que esclarece a passagem entre as Eqs.(4.32) e (4.33) na demonstração do resultado principal deste trabalho que é o Teorema 19

► **Proposição 8:** *Seja* $P_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$*. Dados* $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b \in \mathbb{O}$*, para todo* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$ $k = 1, 2, \dots, 6$ *temos*

$$\boxed{(\mathbf{e}_a \circ ((P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} = \lambda (P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b)\mathbf{e}_a} \tag{4.23}$$

onde $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$. ◄

Demonstração: Pela Eq.(4.9) P_0 projeta na componente escalar de e_b e consequentemente pelo item (b) do Lema 12, onde $(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} = \lambda \mathbf{e}_a$, a Eq.(4.23) assegura a propriedade. □

► **Obs.12:** Note que a parte escalar de $P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b$ é nula, porém mantemos o resultado porque nos será útil em breve quando iremos generalizar o Teorema 19 para A e B octonions.◄

Outro resultado importante na demonstração do Teorema 19 é dado pelo lema a seguir

► **Lema 13:**

(a) Dados $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \dots, 6$ *então*

$$\boxed{(\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) = \eta \mathbf{e}_0} \tag{4.24}$$

onde $\eta = (-1)^{|u|(r_{|u|} - r_{|u|-1}) + (8-|u|)(7-|u|)/2}$.

(b) Dados $\mathbf{e}_a \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \dots, 6$ *então*

$$\boxed{(\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) = \beta \mathbf{e}_a} \tag{4.25}$$

onde $\beta = (-1)^{|u|(|u|+1)/2}$.

◄

Demonstração: Vide Apêndice F.□

Note que o item (a) dos Lemas 12 e 13 é elaborada para $\mathbf{e}_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$ enquanto que o item (b) para $\mathbf{e}_a \in \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$.

▶ **Obs.13:** Do Lema 13 temos também duas involuções induzidas por u nos octonions

$$\clubsuit_u^2(\mathbf{e}_0) := (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = \eta \mathbf{e}_0$$
$$\vdash_u (\mathbf{e}_a) := (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = \beta \mathbf{e}_a$$

e é imediato ver que $\clubsuit_u^2 \clubsuit_u^2(\mathbf{e}_0) = \mathbf{e}_0$ e $\vdash_u \vdash_u (\mathbf{e}_a) = \mathbf{e}_a$.◀

▶ **Obs.14:** Essas involuções trazem novas perspectivas na generalização da Eq.(3.13) no contexto do produto-$\bullet$, pois nos permitem conhecer mais detalhes acerca do Teorema 19 na tentativa de buscar a sua generalização para A e B octonions de posse dos lemas, proposições e agora involuções como ferramentas necessárias para o trabalho. ◀

Portanto, usando os resultados anteriores, $(A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = (A \circ (B \circ X)) \circ \bar{X}$ pode ser generalizada no contexto da álgebra de Clifford sobre o espaço tangente em um ponto arbitrário em S^7.

▶ **Teorema 19:**

(a) Dados $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ *temos*

$$\boxed{(\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_0) = \rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}} \tag{4.26}$$

onde $\rho = (-1)^{|u|(|u|-1)/2}$.

(b) Dados $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ *temos*

$$\boxed{(\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) = \rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}} \tag{4.27}$$

onde $\rho = (-1)^{|u|(|u|-1)/2}$.

(c) Dados $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_0 \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ *temos*

$$\boxed{(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_0) = 2\lambda(\eta - \lambda)\mathbf{e}_a + \lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}} \tag{4.28}$$

onde $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$ *e* $\eta = (-1)^{|u|(r_{|u|}-r_{|u|-1})+(8-|u|)(7-|u|)/2}$.

(d) Dados $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ *temos*

$$\boxed{(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) = \lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}} \tag{4.29}$$

onde $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$.

◀

Demonstração:

(a) Primeiramente, pelo Lema 11 (a) temos que

$$\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u = \rho \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

onde $\rho = (-1)^{|u|(|u|-1)/2}$. Na Eq.(4.19),

$$(\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ X = \rho \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \tag{4.30}$$

tome X como o octonion $(\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0)$ — sem parte escalar — de maneira a traçar uma analogia com o produto-u. Então, para o caso $A = \mathbf{e}_0$ e $B = \mathbf{e}_0$ podemos generalizar a Eq.(3.13)

$$(A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = (A \circ (B \circ X)) \circ \bar{X}$$

Considerando apenas $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}), k = 1, 2, \dots, 6$, pois se $u \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$ não teríamos nada de novo a provar uma vez que $(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) = \mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b$. A demostração segue

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \\
= \; & \rho \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.12)}{=} \; & \rho \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - ((\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} \bar{\mathbf{e}}_0) \circ (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0))) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.11)}{=} \; & \rho \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\mathbf{e}_0 \circ (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0))) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.15)}{=} \; & \rho \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\mathbf{e}_0 \circ ((\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.24)}{=} \; & \rho \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_0 - (\mathbf{e}_0 \circ ((\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.2)}{=} \; & \rho \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_0 - (\mathbf{e}_0 \circ ((2P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} + (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.10)}{=} \; & \rho \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_0 - (2P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0)((\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}) + (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.21)}{=} \; & \rho \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_0 - (2P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0)\eta \mathbf{e}_0 + (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
= \; & \rho \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_0 - (2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_0 + (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
= \; & \rho (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{(\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) = \rho (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}}$$

(b) Pelo Lema 11 (a) temos que

$$\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u = \rho \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

onde $\rho = (-1)^{|u|(|u|-1)/2}$. Na Eq.(4.19),

$$(\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ X = \rho \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}}_0)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \tag{4.31}$$

tome X como o octonion $(\bar{u}\bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b)$. Então, para o caso $A = \mathbf{e}_0$ e $B = \mathbf{e}_b$ podemos generalizar a Eq.(3.13)

$$(A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = (A \circ (B \circ X)) \circ \bar{X}$$

Considerando apenas $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}), k = 1, 2, \dots, 6$, temos

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \\
= \; & \rho\left[(2P_0 \bullet_\lrcorner ((\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\alpha_0 \bullet_\lrcorner ((\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \circ \bar{\mathbf{e}_0})) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}\right] \\
\overset{(4.12)}{=} \; & \rho\left[(2P_0 \bullet_\lrcorner ((\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - ((\alpha_0 \bullet_\lrcorner \bar{\mathbf{e}_0}) \circ (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b))) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}\right] \\
\overset{(4.11)}{=} \; & \rho\left[(2P_0 \bullet_\lrcorner ((\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\mathbf{e}_0 \circ (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b))) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}\right] \\
\overset{(4.15)}{=} \; & \rho\left[(2P_0 \bullet_\lrcorner ((\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_0 - (\mathbf{e}_0 \circ ((\alpha_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}\right] \\
\overset{(4.25)}{=} \; & \rho\left[(2\beta P_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 - (\mathbf{e}_0 \circ ((\alpha_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}\right] \\
\overset{(4.2)}{=} \; & \rho\left[(2\beta P_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 - (\mathbf{e}_0 \circ ((2P_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} + (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}\right] \\
\overset{(4.10)}{=} \; & \rho\left[(2\beta P_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 - (2P_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b)((\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}) + (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}\right] \\
\overset{(4.21)}{=} \; & \rho\left[(2\beta P_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_0 - (2P_0 \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b)\eta\mathbf{e}_0 + (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}\right] \\
\overset{(4.9)}{=} \; & \rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{(\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_b) = \rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}}$$

(c) A partir do Lema 11 (b) temos que

$$\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u = \lambda \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u})$$

onde $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$. Na Eq.(4.20),

$$(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ X = \lambda\left[(2P_0 \bullet_\lrcorner (X \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_a})) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}\right]$$

tome X como o octonion $(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_0)$ a fim de obter um produto análogo com o produto-u. Então, para o caso $A = \mathbf{e}_a$ e $B = \mathbf{e}_0$ podemos generalizar a Eq.(3.13)

$$(A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = (A \circ (B \circ X)) \circ \bar{X}$$

Considerando apenas $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}), k = 1, 2, \ldots, 6$, temos

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \\
= \; & \lambda \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \bar{\mathbf{e}_a})) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.12)}{=} \; & \lambda \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - ((\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} \bar{\mathbf{e}_a}) \circ (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0))) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.11)}{=} \; & \lambda \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\mathbf{e}_a \circ (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0))) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.15)}{=} \; & \lambda \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\mathbf{e}_a \circ ((\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.24)}{=} \; & \lambda \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_a - (\mathbf{e}_a \circ ((\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.2)}{=} \; & \lambda \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_a - (\mathbf{e}_a \circ ((2P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} + (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.10)}{=} \; & \lambda \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_a - (2P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0)((\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}) + (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.22)}{=} \; & \lambda \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_a - (2P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0)\lambda \mathbf{e}_a + (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
= \; & \lambda \left[(2\eta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_a - (2\lambda P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_a + (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
\overset{(4.9)}{=} \; & \lambda \left[2\eta \mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_a - 2\lambda \mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_a + (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right] \\
= \; & \lambda \left[2(\eta - \lambda)\mathbf{e}_a + (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right]
\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) = 2\lambda(\eta - \lambda)\mathbf{e}_a + \lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}}$$

(d) O Lema 11 (b) nos diz que

$$\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u = \lambda \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

onde $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$. Na Eq.(4.20),

$$(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ X = \lambda \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (X \circ \bar{\mathbf{e}_a})) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \right]$$

tome X como o octonion $(\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b)$. Então, para o caso $A = \mathbf{e}_a$ e $B = \mathbf{e}_b$ podemos generalizar a Eq.(3.13)

$$(A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = (A \circ (B \circ X)) \circ \bar{X}$$

Considerando apenas $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}), k = 1, 2, \dots, 6$, temos

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \\
= \; & \lambda \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \circ \bar{\mathbf{e}_a})) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}\right] \\
\stackrel{(4.12)}{=} \; & \lambda \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - ((\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} \bar{\mathbf{e}_a}) \circ (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b))) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}\right] \\
\stackrel{(4.11)}{=} \; & \lambda \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\mathbf{e}_a \circ (\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b))) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}\right] \\
\stackrel{(4.15)}{=} \; & \lambda \left[(2P_0 \bullet_{\lrcorner} ((\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}))) \circ \mathbf{e}_a - (\mathbf{e}_a \circ ((\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}\right] \\
\stackrel{(4.25)}{=} \; & \lambda \left[(2\beta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_a - (\mathbf{e}_a \circ ((\alpha_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}\right] \\
\stackrel{(4.2)}{=} \; & \lambda \left[(2\beta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_a - (\mathbf{e}_a \circ ((2P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} + (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}\right] \qquad (4.32) \\
\stackrel{(4.10)}{=} \; & \lambda \left[(2\beta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_a - (2P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b)((\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}) + (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}\right] \\
\stackrel{(4.22)}{=} \; & \lambda \left[(2\beta P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_a - (2P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b)\lambda \mathbf{e}_a + (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}\right] \qquad (4.33) \\
\stackrel{(4.9)}{=} \; & \lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) = \lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}}$$

□

► **Obs.15:** Note que o elemento $P_0 \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b$ que aparece nas demonstrações do Teorema 19 (b) e (d) é nulo. Isto ocorre devido a projeção do vetor em sua componente escalar ser nula, veja a Eq.(4.10).◄

Agora já temos condições de enunciar um resultado que generaliza a Eq.(3.13)

$$(A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = (A \circ (B \circ X)) \circ \bar{X}$$

para $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ homogêneo e simples e $A, B \in \mathbb{O}$ octonions. Note que, pelo Teorema 19

$$\begin{aligned}
(A \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} B) &= ((A^0\mathbf{e}_0 + A^a\mathbf{e}_a) \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} (B^0\mathbf{e}_0 + B^b\mathbf{e}_b)) \\
&= (A^0\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} B^0\mathbf{e}_0) \\
&\quad +(A^0\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} B^b\mathbf{e}_b) \\
&\quad +(A^a\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} B^0\mathbf{e}_0) \\
&\quad +(A^a\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} B^b\mathbf{e}_b) \\
&= A^0B^0\rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
&\quad +A^0B^b\rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
&\quad +A^aB^0\left[2\lambda(\eta - \lambda)\mathbf{e}_a + \lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}\right] \\
&\quad +A^aB^b\lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}
\end{aligned}$$

onde $A^a\mathbf{e}_a$ e $B^b\mathbf{e}_b$ indicam $\sum_{a=1}^{7} A^a\mathbf{e}_a$ e $\sum_{b=1}^{7} B^b\mathbf{e}_b$ respectivamente.

Se tomarmos $A^0 = A^a = B^0 = B^b = 1$ na equação anterior teremos

$$\begin{aligned}
(A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B) &= \rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} \\
&+\rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} \\
&+2\lambda(\eta - \lambda)\mathbf{e}_a + \lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} \\
&+\lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} \\
&= 2\lambda(\eta - \lambda)\mathbf{e}_a + ((\underbrace{\rho\mathbf{e}_0 + \lambda\mathbf{e}_a}_{\star A}) \circ ((\underbrace{\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_b}_{B}) \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}
\end{aligned}$$

e podemos resumir em

$$\boxed{(A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B) = 2\lambda(\eta - \lambda)\mathbf{e}_a + (\star A \circ (B \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}} \tag{4.34}$$

As constantes λ, η, β e ρ possuem valor ± 1 de acordo com o grau do elemento homogêneo u. Veja a tabela abaixo

constantes\\k	1	2	3	4	5	6
λ	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$
η	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1
β	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1
ρ	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1

Tabela 4.1: Valores das principais constantes utilizadas.

Da Eq.(4.34) observa-se de imediato a aparição de uma patologia, $2\lambda(\eta - \lambda)\mathbf{e}_a$, identificada no item ($c$) do Teorema 19. Entretanto, estudando o valor das constantes λ e η de acordo com a Tabela 4.1 encontramos o valor de $\lambda(\eta - \lambda)$ para cada $k = 1, 2, \ldots, 6$

constante\\k	1	2	3	4	5	6
$\lambda(\eta - \lambda)$	0	-2	-2	-2	-2	-2

Então podemos reescrever a Eq.(4.34) com o seguinte resultado

▷ **Corolário 2:** Dados $A = A^0\mathbf{e}_0 + A^a\mathbf{e}_a$ e $B = B^0\mathbf{e}_0 + B^b\mathbf{e}_b$ octonions com $A^0 = A^a = B^0 = B^b = 1$ então

(a) Se $u \in \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\boxed{(A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B) = (\star A \circ (B \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}}$$

(b) Se $u \in \Lambda_j(\mathbb{R}^{0,7})$, $j = 2, 3, \ldots, 6$ então

$$\boxed{(A \bullet_\llcorner u) \circ (\bar{u} \bullet_\lrcorner B) = -4\mathbf{e}_a + (\star A \circ (B \bullet_\llcorner u)) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})}}$$

onde $\star A = \rho\mathbf{e}_0 + \lambda\mathbf{e}_a$.

◁

O Teorema 19 nos revela que a expressão $\overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}$ é percebida pelo fibrado exterior ao mesmo tempo que no fibrado tangente passa despercebida. De fato, fazendo $u = X$ nos itens (a), (b), (c) e (d) obtemos

$$(\mathbf{e}_0 \circ X) \circ (\bar{X} \circ \mathbf{e}_0) = (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \circ X)) \circ \bar{X}$$
$$(\mathbf{e}_0 \circ X) \circ (\bar{X} \circ \mathbf{e}_b) = (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \circ X)) \circ \bar{X}$$
$$(\mathbf{e}_a \circ X) \circ (\bar{X} \circ \mathbf{e}_0) = (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \circ X)) \circ \bar{X}$$
$$(\mathbf{e}_a \circ X) \circ (\bar{X} \circ \mathbf{e}_b) = (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ X)) \circ \bar{X}$$

que são casos particulares da Eq.(3.13) devida a Dixon.

Avaliando quais são as mudanças de sinais sentidas por um octonion arbitrário perpassando pelo processo descrito ao longo do Capítulo 4, incluindo o automorfismo e os anti-automorfismos contidos nos Lemas 11, 12 e 13, apresentamos de forma resumida a generalização que obtivemos para a Eq.(3.13), a saber

$$(A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = (A \circ (B \circ X)) \circ \bar{X},$$

para multivetores de Clifford homogêneos no Corolário 2. Note que para $u = X$ temos simplesmente a Eq.(3.13). Este resultado nos permite vislumbrar novos horizontes e chegar a lugares inexplorados. Como proposta de trabalho podemos nos perguntar se existe uma expressão semelhante com a que obtivemos para a outra equação em 3.13,

$$(A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = X \circ ((\bar{X} \circ A) \circ B).$$

5 Perspectivas e Desenvolvimento Final

Assim como as fibrações de Hopf podem ser obtidas como uma aplicação do produto-X [Dix94a], um trabalho natural deveria ser a verificação do significado geométrico — no contexto das fibrações de Hopf — de produtos particulares como $\mathbf{e}_a \circ_u \mathbf{e}_b$. O formalismo aqui apresentado poderá fazer — por exemplo — a fibração de Hopf $S^3 \cdots S^7 \to S^4$ e a torção paralelizável sobre S^7 que surge a partir da deformação do produto octonionico. O parâmetro $A \circ_X B = (A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B) = \bar{X} \circ ((X \circ A) \circ B)$ é duas vezes a torção paralelizável [Roo84] cujos componentes são dados por $T_{ijk}(X) = [(\bar{\mathbf{e}}_i \circ \bar{X}) \circ (X \circ \mathbf{e}_j)] \circ \mathbf{e}_k$, que é exatamente o produto-X entre $\bar{\mathbf{e}}_i$ e $\mathbf{e}_j$ [Ced95, Dix94a, Beg88, Roo84]. A questão para o análogo à estrutura acima, da forma $(A \circ (B \bullet_\llcorner u)) \bullet_\llcorner \bar{u}$ para $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$, $A, B \in \mathbb{O}$, é de permitir extensões não-triviais [Sch59] mas que até o momento permanecem em aberto.

As dificuldades naturais em calcular produtos não-associativos são contornadas quando esses produtos podem ser incorporados na estrutura multivetorial da álgebra de Clifford. Essa é uma propriedade forte remanescente do pressuposto que tem-se definido uma extensão do produto octonionico de maneira a incluir também produtos não-associativos entre octonions e multivetores de Clifford, e também entre multivetores de Clifford. Por meio do produto-$\odot$, todo número arbitrário de produtos octonionicos subsequenciais são considerados como o produto-$\odot$ envolvendo multivetores de Clifford associado com o produto octonionico subsequencial definido nas Eqs.(3.21,3.22,3.32). O número arbitrário de produtos octonionicos pode ser compilado num único produto — o produto-$\odot$ — e sua estrutura multivetorial de Clifford associada.

Quando lidamos com multivetores simples e homogêneos em $\mathcal{C}\ell_{0,7}$, a estrutura não-associativa relacionada aos produtos octonionicos subsequenciais entre as unidades octonionicas pode ser considerada na estrututura anticomutativa da álgebra exterior subjacente $\Lambda(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$. Não é uma tarefa simples considerar produtos não-associativos inversos. Por exemplo, dado $\alpha_0 = \frac{1}{4}(-3 + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_7\mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_7 + \mathbf{e}_6\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_7\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_6\mathbf{e}_5)$ [Dix94a], é possível mostrar que

$$-(\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ X = -(\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \circ \mathbf{e}_b)) \circ \mathbf{e}_a + (\alpha_0 \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_a})) \circ \bar{\mathbf{e}_b} - (X \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_a, \quad \forall X \in \mathbb{O}.$$

As ações à esquerda introduzidas em [Dix94a] podem ser completamente descritas no formalismo do produto-$\bullet$, já que mostram explicitamente o manifesto caráter da álgebra exterior no caráter da ação subsequente à esquerda. Formalizamos completamente a estrutura introduzida em [Dix94a, Ced95] numa plataforma robusta fornecida pelo fibrado de Clifford sobre S^7. A possibilidade de efetuarmos produtos não-associativos entre multivetores arbitrários de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ surge naturalmente em nosso formalismo que completa [RV06a], e também generaliza o formalismo introduzido em [Dix94a], com relação ao produto-X original.

Os autores em [RV06a] introduziram a álgebra octonionica na arena da álgebra de Clifford e lidaram com produtos não-associativos, primeiramente introduzidos por Dixon [Dix94a] com os produtos-X e XY entre octonions e os produtos-u, -$\bullet$, e -$\odot$ com um octonion e um multivetor de Clifford, e entre multivetores de Clifford. Nessa dissertação esses produtos são generalizados com respeito a direção, onde mais possibilidades de se fazer o produto aparecem e uma lista completa delas é exibida. Além disso, três lemas importantes em relação ao produto-$\bullet$ são mostrados, e uma generalização para os produtos não-associativos é fornecida, usando ambos os produtos-u e -$\bullet$. Tais lemas são o germem para a extensão da Eq(3.13) no sentido de englobar um elemento $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ arbitrário ao invés de $X \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$. Apesar do Exemplo 10 afirmar que uma substituição ingênua de $X \in \mathbb{O}$ por $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ não vale em geral, obtemos as seguintes expressões no Teorema 19

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) &= \rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
(\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) &= \rho(\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_0) &= 2\lambda(\eta - \lambda)\mathbf{e}_a + \lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} \mathbf{e}_b) &= \lambda(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}
\end{aligned}$$

para $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b \in \mathbb{O}$ e $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \dots, 6$, onde $\rho = (-1)^{|u|(|u|-1)/2}$, $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$ e $\eta = (-1)^{|u|(r_{|u|} - r_{|u|-1}) + (8-|u|)(7-|u|)/2}$. E finalmente, munido desses resultados chegamos a expressão mais geral, no sentido de que assume as entradas como sendo octocions e multivetores de Clifford homogêneos. O Corolário 2 apresenta nosso resultado que generaliza a Eq.(3.13) posta somente para octonions.

Dados $A = A^0\mathbf{e}_0 + A^a\mathbf{e}_a$ e $B = B^0\mathbf{e}_0 + B^b\mathbf{e}_b$ octonions com $A^0 = A^a = B^0 = B^b = 1$ então:

- Se $u \in \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\boxed{(A \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} B) = (\star A \circ (B \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}}$$

- Se $u \in \Lambda_j(\mathbb{R}^{0,7})$, $j = 2, 3, \dots, 6$ então

$$\boxed{(A \bullet_{\llcorner} u) \circ (\bar{u} \bullet_{\lrcorner} B) = -4\mathbf{e}_a + (\star A \circ (B \bullet_{\llcorner} u)) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})}}$$

onde $\star A = \rho\mathbf{e}_0 + \lambda\mathbf{e}_a$.

Este resultado nos indica que existiam muito mais informações a respeito da Eq.(3.13) do que poderíamos imaginar. Isto é reflexo de uma exploração mais profunda sobre o tema. Percebemos o quão importante foi trabalhar com o fibrado exterior e de Clifford ao invés de contentar-nos com as abordagens feitas com o fibrado tangente. Esperamos que essas descobertas possam nos trazer à luz novas descobertas e que possam nos ajudar a compreender melhor os fenômenos descritos por tais equações.

Referências Bibliográficas

[Ati64] Atiyah M F, Bott R e Shapiro A, *Clifford Modules*, Topology **3** (suppl. 1), 3-38 (1964).

[Bae01] Baez J, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002) 145-205 [`arXiv:math.RA/0105155v4`].

[Bay95b] Baylis W, *The paravector model of spacetime*, em *Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser, Berlin 1995.

[Beg88] Bengtsson I e Cederwall M, *Particles, twistors and division algebras*, Nuc. Phys. **B302**, 81 (1988).

[Ben87] Benn I e Tucker R, *An Introduction to Spinors and Geometry with applications in Physics*, Adam Hilger, Bristol 1987.

[Bot58] Bott R e Milnor J, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 87-89 (1958).

[Bud89] Budinich P e Trautman A, *The Spinorial Chessboard*, Springer, NY 1989.

[Ced93] Cederwall M, *Introduction to Division Algebras, Sphere Algebras and Twistors*, talk presented at the Theoretical Physics Network Meeting at NORDITA, Copenhagen, set. 1993 [`hep-th/9310115`].

[Ced95] Cederwall M e Preitschopf C R, *S^7 and its Kač-Moody Algebra*, Commun. Math. Phys. **167**, 373 (1995) [`hep-th/9309030`].

[Che54] Chevalley C, *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia Univ. Press, New York 1954.

[Cli78] Clifford W K, *Applications of Grassmann extensive algebra*, Am. J. Math. Pure and Appl., **1** (1878).

[Coq82] Coquereaux R, *mod 8 periodicity of real Clifford algebras and particle physics*, Phys. Lett. **115B**, 389-395 (1982).

[Cru90] Crumeyrolle A, *Orthogonal and Sympletic Clifford Algebras*, Kluwer, Dordrecht 1990.

[Roc06a] da Rocha R, *Álgebras de Clifford, Generalizações e Aplicações à Física-Matemática*, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, 2005.

[RV06a] da Rocha R, e Vaz Jr. J, *Clifford algebra-parametrized octonions and generalizations*, J. Algebra **301** (2006) 459-473 [`arXiv:math-ph/0603053v1`].

[RV06b] da Rocha R e Vaz Jr., J, *Extended Grassmann and Clifford Algebras*, Adv. appl. Clifford alg. **16** (2006) 103-125.

[Roc02] da Rocha R, *Spinors e twistors no modelo paravetorial do espaço-tempo: uma formulacao via álgebras de Clifford*, Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, 2001.

[Wit84] de Wit B e Nicolai H, *The parallelizing S^7 torsion in gauged $N = 8$ supergravity*, Nucl. Phys. **B231**, 506 (1984).

[Dix94a] Dixon G M, *Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers, and the Algebraic Design of Physics* Kluwer, Dordrecht 1994.

[Dix94b] Dixon G M, *Octonion X-product orbits* [`hep-th 9410202`]; *Octonion X-product and octonion lattices* [`hep-th 9411063`].

[Dix95] Dixon G M, *Octonion XY-product* [`hep-th/9503053`].

[Eld00a] Elduque A e Myung H C, *Octonions and affine connections on spheres*, Nonassociative Algebra and Its Applications (Costa R, Guzzo Jr. H, Grichkov A, e Peresi L A, eds.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **211**, 43-54, Marcel-Dekker, New York 2000.

[Eld00b] Elduque A e Myung H C, *The Reductive Pair (B_4, B_3) and Affine Connections on S^{15}*, J. Algebra **227** (2000) 504-531; Elduque A, *Triality and automorphisms and derivations of composition algebras*, Linear Algebra Appl. **314** (2000) 49-74.

[Fje86] Fjelstad P, *Extending special relativity via the perplex numbers*, Am. J. Phys., **54** 416 (1986).

[Gil91] Gilbert J e Murray M, *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1991.

[Gun95] Günaydin M e Nicolai H, *Seven-dimensional octonionic Yang-Mills instanton and its extension to an heterotic string soliton*, Phys. Lett. **B351**, 169 (1995).

[Gun96] Günaydin M e Ketov S V, *Seven-sphere and the exceptional $N = 7$ and $N = 8$ superconformal algebras*, Nucl. Phys. **B467** (1996) 215-246 [`arXiv:hep-th/9601072`.

[Gur97] Gürlebeck K e Sprössig W, *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*, J. Wiley, Indianapolis 1997.

[Hal74] Halmos P, *Finite-dimensional Vector Spaces*, Springer-Verlag, Heidelberg 1974.

[Hes66] Hestenes D, *Spacetime Algebra*, Gordon and Breach, New York 1966.

[Hop31] Hopf H, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. **104**, 637-665 (1931).

[Iva93] Ivanova T, *Octonions, self-duality and strings*, Phys. Lett. **B315** 277 (1993).

[Kel94] Keller J, *Quaternionic, complex, duplex and real Clifford algebras*, Adv. Appl. Cliff. Algebras, **4**, 1 (1994).

[Elo05b] Lima E L, *Álgebra Exterior*, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro 2005.

[Lou02] Lounesto P, *Clifford Algebras and Spinors*, 2^{nd} ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[Lou94] Lounesto P, *Clifford algebras, relativity and quantum mechanics*, in Letelier P e Rodrigues, Jr W A (eds.), *Gravitation. The Spacetime Structure,* 50-81, Proc. of the 8^{th} Latin American Symposium on Relativity and Gravitation, Águas de Lindóia, Brazil, 25-30 July 1993, World-Scientific, London 1993.

[Lou03] Lounesto P, *Counter-examples in Clifford Algebra*, Advances in Applied Clifford Algebras **6** (2006) 69-104.

[Lou01] Lounesto P, *Octonions and triality*, Advances in Applied Clifford Algebras **11**, (2) 191-213 (2001).

[Lou93] Lounesto P e Semenov P, *On Invertibility in Lower Dimensional Clifford Algebras*, Advances in Applied Clifford Algebras **3**, (2) (1993) 133-137.

[Ma89] Maks J, *Modulo (1,1) Periodicity of Clifford Algebras and Generalized (anti-)Möbius Transformations*, tese de doutorado defendida na Technische Universiteit Delft, 1989.

[Mou34] Moufang R, *Zur Struktur von Alternativkorpern*, Mathematische Annalen, **110** (1934) 416-430.

[Por95] Porteous I R, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics), Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995.

[Por69] Porteous I R, *Topological Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1969.

[Ree90] Reese Harvey F, *Spinors and Calibrations*, Academic Press, Boston 1990.

[Rie58] Riesz M, *Clifford Numbers and Spinors*, reprinted by E. F. Bolinder and P. Lounesto (eds.), Kluwer, Dordrecht 1993.

[Roo84] Rooman M, *11-dimensional supergravity and octonions*, Nucl. Phys. **B 236** (1984) 501-521.

[Sch95] Schafer R D, *Introduction to Non-Associative Algebras*, Dover, New York 1995.

[Spp98] Schempp W, *Quantum holography and magnetic resonance tomography: an ensemble quantum computing approach*, Taiwanese J. Mth. **2**, 3, 257-286 (1998).

[Sch59] Schwinger J, *Field Theory Commutators*, Phys. Rev. Lett. **3** (1959) 296-297.

[Sny97] Snygg J, *Clifford Algebra, a Computational Tool for Physicists*, Oxford Univ. Press, Oxford 1997.

[Vaz05] Vaz Jr. J , *Notas de Aula MT-307*, [`http://www.ime.unicamp.br/%7Evaz/mt307a05.htm`]

[Vin03] Vinberg E B, *A Course in Algebra*, Graduate Studies in Mathematics **56**, AMS, Providence 2003.

O referencial $\{\mathrm{e}_a \circ X\}$ A

Este Apêndice tem por objetivo verificar que os vetores $\mathbf{e}_a \circ X$ são ortogonais a X pela definição do produto escalar octonionico, além disso, mostramos que a ação dos bivetores em um octonion arbitrário também é ortogonal a $X \in \mathbb{O}$.

Como $X \in \mathbb{O}$ não toma uma unidade priviligiada, sem perda de generalidade defina $\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_1$, uma vez que o processo é similar para todo $\mathbf{e}_a$, $a = 1, 2, \ldots, 7$, deve-se verificar que $\langle \mathbf{e}_a \circ X, X\rangle = 0$.

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{e}_1 \circ X, X\rangle &= 1/2[(\overline{\mathbf{e}_1 \circ X}) \circ X + \bar{X} \circ (\mathbf{e}_1 \circ X)] \\
&= 1/2[(-X^0\mathbf{e}_1 - X^1 - X^2\mathbf{e}_6 - X^3\mathbf{e}_4 + X^4\mathbf{e}_3 - X^5\mathbf{e}_7 + X^6\mathbf{e}_2 + X^7\mathbf{e}_5) \circ \\
&\quad (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) + \\
&\quad (X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7) \circ \\
&\quad (X^0\mathbf{e}_1 - X^1 + X^2\mathbf{e}_6 + X^3\mathbf{e}_4 - X^4\mathbf{e}_3 + X^5\mathbf{e}_7 - X^6\mathbf{e}_2 - X^7\mathbf{e}_5)] \\
&= 1/2[-(X^0)^2\mathbf{e}_1 + X^0X^1 - X^0X^2\mathbf{e}_6 - X^0X^3\mathbf{e}_4 + X^0X^4\mathbf{e}_3 - X^0X^5\mathbf{e}_7 + X^0X^6\mathbf{e}_2 + X^0X^7\mathbf{e}_5 \\
&\quad -X^1X^0 - (X^1)^2\mathbf{e}_1 - X^1X^2\mathbf{e}_2 - X^1X^3\mathbf{e}_3 - X^1X^4\mathbf{e}_4 - X^1X^5\mathbf{e}_5 - X^1X^6\mathbf{e}_6 - X^1X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^2X^0\mathbf{e}_6 - X^2X^1\mathbf{e}_1 + (X^2)^2\mathbf{e}_1 - X^2X^3\mathbf{e}_5 + X^2X^4\mathbf{e}_7 + X^2X^5\mathbf{e}_3 + X^2X^6 - X^2X^7\mathbf{e}_4 \\
&\quad -X^3X^0\mathbf{e}_4 - X^3X^1\mathbf{e}_3 + X^3X^2\mathbf{e}_5 + (X^3)^2\mathbf{e}_1 + X^3X^4 - X^3X^5\mathbf{e}_2 - X^3X^6\mathbf{e}_7 + X^3X^7\mathbf{e}_6 \\
&\quad +X^4X^0\mathbf{e}_3 - X^4X^1\mathbf{e}_4 - X^4X^2\mathbf{e}_7 - X^4X^3 + (X^4)^2\mathbf{e}_1 + X^4X^5\mathbf{e}_6 - X^4X^6\mathbf{e}_5 + X^4X^7\mathbf{e}_2 \\
&\quad -X^5X^0\mathbf{e}_7 - X^5X^1\mathbf{e}_5 - X^5X^2\mathbf{e}_3 + X^5X^3\mathbf{e}_2 - X^5X^4\mathbf{e}_6 + (X^5)^2\mathbf{e}_1 + X^5X^6\mathbf{e}_4 + X^5X^7 \\
&\quad +X^6X^0\mathbf{e}_2 - X^6X^1\mathbf{e}_6 - X^6X^2 + X^6X^3\mathbf{e}_7 + X^6X^4\mathbf{e}_5 - X^6X^5\mathbf{e}_4 + (X^6)^2\mathbf{e}_1 - X^6X^7\mathbf{e}_3 \\
&\quad +X^7X^0\mathbf{e}_5 - X^7X^1\mathbf{e}_7 + X^7X^2\mathbf{e}_4 - X^7X^3\mathbf{e}_6 - X^7X^4\mathbf{e}_2 - X^7X^5 + X^7X^6\mathbf{e}_3 + (X^7)^2\mathbf{e}_1 \\
&\quad +(X^0)^2\mathbf{e}_1 - X^0X^1 + X^0X^2\mathbf{e}_6 + X^0X^3\mathbf{e}_4 - X^0X^4\mathbf{e}_3 + X^0X^5\mathbf{e}_7 - X^0X^6\mathbf{e}_2 - X^0X^7\mathbf{e}_5 \\
&\quad +X^1X^0 + (X^1)^2\mathbf{e}_1 + X^1X^2\mathbf{e}_2 + X^1X^3\mathbf{e}_3 + X^1X^4\mathbf{e}_4 + X^1X^5\mathbf{e}_5 + X^1X^6\mathbf{e}_6 + X^1X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^2X^0\mathbf{e}_6 + X^2X^1\mathbf{e}_1 - (X^2)^2\mathbf{e}_1 - X^2X^3\mathbf{e}_5 + X^2X^4\mathbf{e}_7 + X^2X^5\mathbf{e}_3 - X^2X^6 - X^2X^7\mathbf{e}_4 \\
&\quad +X^3X^0\mathbf{e}_4 + X^3X^1\mathbf{e}_3 + X^3X^2\mathbf{e}_5 - (X^3)^2\mathbf{e}_1 - X^3X^4 - X^3X^5\mathbf{e}_2 - X^3X^6\mathbf{e}_7 + X^3X^7\mathbf{e}_6 \\
&\quad -X^4X^0\mathbf{e}_3 + X^4X^1\mathbf{e}_4 - X^4X^2\mathbf{e}_7 + X^4X^3 - (X^4)^2\mathbf{e}_1 + X^4X^5\mathbf{e}_6 - X^4X^6\mathbf{e}_5 + X^4X^7\mathbf{e}_2 \\
&\quad +X^5X^0\mathbf{e}_7 + X^5X^1\mathbf{e}_5 - X^5X^2\mathbf{e}_3 + X^5X^3\mathbf{e}_2 - X^5X^4\mathbf{e}_6 - (X^5)^2\mathbf{e}_1 + X^5X^6\mathbf{e}_4 - X^5X^7 \\
&\quad -X^6X^0\mathbf{e}_2 + X^6X^1\mathbf{e}_6 + X^6X^2 + X^6X^3\mathbf{e}_7 + X^6X^4\mathbf{e}_5 - X^6X^5\mathbf{e}_4 - (X^6)^2\mathbf{e}_1 - X^6X^7\mathbf{e}_3 \\
&\quad -X^7X^0\mathbf{e}_5 + X^7X^1\mathbf{e}_7 + X^7X^2\mathbf{e}_4 - X^7X^3\mathbf{e}_6 - X^7X^4\mathbf{e}_2 + X^7X^5 + X^7X^6\mathbf{e}_3 - (X^7)^2\mathbf{e}_1] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Agora, será mostrado que $\langle \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b \bullet\lrcorner\, X, X\rangle = 0$. Novamente, sem perda de generalidade, escolhendo $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$

vem:

$$
\begin{aligned}
& \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \bullet_\lrcorner X, X\rangle \\
= \; & 1/2[(\overline{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \bullet_\lrcorner X}) \circ X + \bar{X} \circ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \bullet_\lrcorner X)] \\
= \; & 1/2[(-X^0\mathbf{e}_6 - X^1\mathbf{e}_2 + X^2\mathbf{e}_1 + X^3\mathbf{e}_5 - X^4\mathbf{e}_7 - X^5\mathbf{e}_3 - X^6 + X^7\mathbf{e}_4) \circ \\
& (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) + \\
& (X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7) \circ \\
& (X^0\mathbf{e}_6 + X^1\mathbf{e}_2 - X^2\mathbf{e}_1 - X^3\mathbf{e}_5 + X^4\mathbf{e}_7 + X^5\mathbf{e}_3 - X^6 - X^7\mathbf{e}_4)] \\
= \; & 1/2(-(X^0)^2\mathbf{e}_6 - X^0X^1\mathbf{e}_2 + X^0X^2\mathbf{e}_1 - X^0X^3\mathbf{e}_5 + X^0X^4\mathbf{e}_7 + X^0X^5\mathbf{e}_3 + X^0X^6 - X^0X^7\mathbf{e}_4 \\
& -X^1X^0\mathbf{e}_2 + (X^1)^2\mathbf{e}_6 + X^1X^2 - X^1X^3\mathbf{e}_7 - X^1X^4\mathbf{e}_5 + X^1X^5\mathbf{e}_4 - X^1X^6\mathbf{e}_1 + X^1X^7\mathbf{e}_3 \\
& +X^2X^0\mathbf{e}_1 - X^2X^1 + (X^2)^2\mathbf{e}_6 + X^2X^3\mathbf{e}_4 - X^2X^4\mathbf{e}_3 + X^2X^5\mathbf{e}_7 - X^2X^6\mathbf{e}_2 - X^2X^7\mathbf{e}_5 \\
& +X^3X^0\mathbf{e}_5 - X^3X^1\mathbf{e}_7 + X^3X^2\mathbf{e}_4 - (X^3)^2\mathbf{e}_6 - X^3X^4\mathbf{e}_2 - X^3X^5 + X^3X^6\mathbf{e}_3 + X^3X^7\mathbf{e}_1 \\
& -X^4X^0\mathbf{e}_7 - X^4X^1\mathbf{e}_5 - X^4X^2\mathbf{e}_3 - X^4X^3\mathbf{e}_2 - (X^4)^2\mathbf{e}_6 + X^4X^5\mathbf{e}_1 + X^4X^6\mathbf{e}_4 + X^4X^7 \\
& -X^5X^0\mathbf{e}_3 + X^5X^1\mathbf{e}_4 + X^5X^2\mathbf{e}_7 + X^5X^3 - X^5X^4\mathbf{e}_1 - (X^5)^2\mathbf{e}_6 + X^5X^6\mathbf{e}_5 - X^5X^7\mathbf{e}_2 \\
& -X^6X^0 - X^6X^1\mathbf{e}_1 - X^6X^2\mathbf{e}_2 - X^6X^3\mathbf{e}_3 - X^6X^4\mathbf{e}_4 - X^6X^5\mathbf{e}_5 - (X^6)^2\mathbf{e}_6 - X^6X^7\mathbf{e}_7 \\
& +X^7X^0\mathbf{e}_4 + X^7X^1\mathbf{e}_3 - X^7X^2\mathbf{e}_5 - X^7X^3\mathbf{e}_1 - X^7X^4 + X^7X^5\mathbf{e}_2 + X^7X^6\mathbf{e}_7 - (X^7)^2\mathbf{e}_6 \\
& +(X^0)^2\mathbf{e}_6 + X^0X^1\mathbf{e}_2 - X^0X^2\mathbf{e}_1 - X^0X^3\mathbf{e}_5 + X^0X^4\mathbf{e}_7 + X^0X^5\mathbf{e}_3 - X^0X^6 - X^0X^7\mathbf{e}_4 \\
& +X^1X^0\mathbf{e}_2 - (X^1)^2\mathbf{e}_6 - X^1X^2 + X^1X^3\mathbf{e}_7 + X^1X^4\mathbf{e}_5 - X^1X^5\mathbf{e}_4 + X^1X^6\mathbf{e}_1 - X^1X^7\mathbf{e}_3 \\
& -X^2X^0\mathbf{e}_1 + X^2X^1 - (X^2)^2\mathbf{e}_6 - X^2X^3\mathbf{e}_4 + X^2X^4\mathbf{e}_3 - X^2X^5\mathbf{e}_7 + X^2X^6\mathbf{e}_2 + X^2X^7\mathbf{e}_5 \\
& +X^3X^0\mathbf{e}_5 + X^3X^1\mathbf{e}_7 - X^3X^2\mathbf{e}_4 + (X^3)^2\mathbf{e}_6 - X^3X^4\mathbf{e}_2 + X^3X^5 + X^3X^6\mathbf{e}_3 + X^3X^7\mathbf{e}_1 \\
& -X^4X^0\mathbf{e}_7 + X^4X^1\mathbf{e}_5 + X^4X^2\mathbf{e}_3 + X^4X^3\mathbf{e}_2 + (X^4)^2\mathbf{e}_6 + X^4X^5\mathbf{e}_1 + X^4X^6\mathbf{e}_4 - X^4X^7 \\
& -X^5X^0\mathbf{e}_3 - X^5X^1\mathbf{e}_4 - X^5X^2\mathbf{e}_7 - X^5X^3 - X^5X^4\mathbf{e}_1 + (X^5)^2\mathbf{e}_6 + X^5X^6\mathbf{e}_5 - X^5X^7\mathbf{e}_2 \\
& +X^6X^0 + X^6X^1\mathbf{e}_1 + X^6X^2\mathbf{e}_2 - X^6X^3\mathbf{e}_3 - X^6X^4\mathbf{e}_4 - X^6X^5\mathbf{e}_5 + (X^6)^2\mathbf{e}_6 - X^6X^7\mathbf{e}_7 \\
& +X^7X^0\mathbf{e}_4 - X^7X^1\mathbf{e}_3 + X^7X^2\mathbf{e}_5 - X^7X^3\mathbf{e}_1 + X^7X^4 + X^7X^5\mathbf{e}_2 + X^7X^6\mathbf{e}_7 + (X^7)^2\mathbf{e}_6) \\
= \; & 0.
\end{aligned}
$$

Demonstração do Lema 6 B

Neste Apêndice veremos a demonstração completa do Lema 6.

▶ **Lema 6:** *Para todo* $a = 0, 1, 2, \ldots, 7$ *e para todo* $X \in \mathbb{O}$ *com* $X^a \in \mathbb{R}$ *tem-se*

$$\boxed{P_a \bullet_{\lrcorner} X = X^a \mathbf{e}_a} \tag{B.1}$$

◀

Demonstração:

$$\begin{aligned}
8P_0 \bullet_{\lrcorner} X &= (1 + \mathbf{e}_{476} + \mathbf{e}_{517} + \mathbf{e}_{621} + \mathbf{e}_{732} + \mathbf{e}_{143} + \mathbf{e}_{254} + \mathbf{e}_{365}) \\
&\quad \bullet_{\lrcorner}(X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \\
&= +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&= 8X^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8P_1 \bullet_{\lrcorner} X &= (1 - \mathbf{e}_{476} + \mathbf{e}_{517} + \mathbf{e}_{621} - \mathbf{e}_{732} + \mathbf{e}_{143} - \mathbf{e}_{254} - \mathbf{e}_{365}) \\
&\quad \bullet_{\lrcorner}(X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \\
&= +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&= 8X^1\mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
8P_2 \bullet_\lrcorner X &= (1 - \mathbf{e}_{476} - \mathbf{e}_{517} + \mathbf{e}_{621} + \mathbf{e}_{732} - \mathbf{e}_{143} + \mathbf{e}_{254} - \mathbf{e}_{365}) \\
&\quad \bullet_\lrcorner (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \\
&= +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&= 8X^2\mathbf{e}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8P_3 \bullet_\lrcorner X &= (1 - \mathbf{e}_{476} - \mathbf{e}_{517} - \mathbf{e}_{621} + \mathbf{e}_{732} + \mathbf{e}_{143} - \mathbf{e}_{254} + \mathbf{e}_{365}) \\
&\quad \bullet_\lrcorner (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \\
&= +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&= 8X^3\mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8P_4 \bullet_\lrcorner X &= (1 + \mathbf{e}_{476} - \mathbf{e}_{517} - \mathbf{e}_{621} - \mathbf{e}_{732} + \mathbf{e}_{143} + \mathbf{e}_{254} - \mathbf{e}_{365}) \\
&\quad \bullet_\lrcorner (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \\
&= +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&= 8X^4\mathbf{e}_4
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
8P_5 \bullet\lrcorner X &= (1 - \mathbf{e}_{476} + \mathbf{e}_{517} - \mathbf{e}_{621} - \mathbf{e}_{732} - \mathbf{e}_{143} + \mathbf{e}_{254} + \mathbf{e}_{365}) \\
&\quad \bullet\lrcorner (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \\
&= +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&= 8X^5\mathbf{e}_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8P_6 \bullet\lrcorner X &= (1 + \mathbf{e}_{476} - \mathbf{e}_{517} + \mathbf{e}_{621} - \mathbf{e}_{732} - \mathbf{e}_{143} - \mathbf{e}_{254} + \mathbf{e}_{365}) \\
&\quad \bullet\lrcorner (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \\
&= +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 - X^7\mathbf{e}_7 \\
&= 8X^6\mathbf{e}_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8P_7 \bullet\lrcorner X &= (1 + \mathbf{e}_{476} + \mathbf{e}_{517} - \mathbf{e}_{621} + \mathbf{e}_{732} - \mathbf{e}_{143} - \mathbf{e}_{254} - \mathbf{e}_{365}) \\
&\quad \bullet\lrcorner (X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \\
&= +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad +X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 - X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 - X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 - X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&\quad -X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 - X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 - X^5\mathbf{e}_5 - X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7 \\
&= 8X^7\mathbf{e}_7
\end{aligned}$$

Portanto, segue-se o resultado $P_a \bullet\lrcorner X = X^a\mathbf{e}_a$. □

Demonstração do Lema 10 C

► **Lema 10:** *Seja* $\alpha_a \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ *— como definido na Eq.(4.2) — com* $a \in \{1, \ldots, 7\}$. *Então, para todo* $X \in \mathbb{O}$ *temos*

$$\boxed{\alpha_a \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_a}) = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_a}} \tag{C.1}$$

◄

Demonstração: Pela definição de α_a na Eq.(4.2) temos

$$\begin{aligned}
& (2P_a - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_a}) \\
= \ & (2P_a - 1) \bullet_\lrcorner ((X^0 + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 + X^3\mathbf{e}_3 + X^4\mathbf{e}_4 + X^5\mathbf{e}_5 + X^6\mathbf{e}_6 + X^7\mathbf{e}_7) \circ \bar{\mathbf{e}_a}) \\
= \ & 2P_a \bullet_\lrcorner (X^0\bar{\mathbf{e}_a} + X^1\mathbf{e}_1 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^2\mathbf{e}_2 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^3\mathbf{e}_3 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^4\mathbf{e}_4 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^5\mathbf{e}_5 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^6\mathbf{e}_6 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^7\mathbf{e}_7 \circ \bar{\mathbf{e}_a}) \\
& -(X^0\bar{\mathbf{e}_a} + X^1\mathbf{e}_1 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^2\mathbf{e}_2 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^3\mathbf{e}_3 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^4\mathbf{e}_4 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^5\mathbf{e}_5 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^6\mathbf{e}_6 \circ \bar{\mathbf{e}_a} + X^7\mathbf{e}_7 \circ \bar{\mathbf{e}_a})
\end{aligned}$$

(a) Se $a = 1$

$$\begin{aligned}
& (2P_1 - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_1}) = 2X^0\bar{\mathbf{e}_1} - X^0\bar{\mathbf{e}_1} - X^1\mathbf{e}_1 \circ \bar{\mathbf{e}_1} - X^2\mathbf{e}_2 \circ \bar{\mathbf{e}_1} - X^3\mathbf{e}_3 \circ \bar{\mathbf{e}_1} - X^4\mathbf{e}_4 \circ \bar{\mathbf{e}_1} \\
& -X^5\mathbf{e}_5 \circ \bar{\mathbf{e}_1} - X^6\mathbf{e}_6 \circ \bar{\mathbf{e}_1} - X^7\mathbf{e}_7 \circ \bar{\mathbf{e}_1} = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_1}
\end{aligned}$$

(b) Se $a = 2$

$$\begin{aligned}
& (2P_2 - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_2}) = 2X^0\bar{\mathbf{e}_2} - X^0\bar{\mathbf{e}_2} - X^1\mathbf{e}_1 \circ \bar{\mathbf{e}_2} - X^2\mathbf{e}_2 \circ \bar{\mathbf{e}_2} - X^3\mathbf{e}_3 \circ \bar{\mathbf{e}_2} - X^4\mathbf{e}_4 \circ \bar{\mathbf{e}_2} \\
& -X^5\mathbf{e}_5 \circ \bar{\mathbf{e}_2} - X^6\mathbf{e}_6 \circ \bar{\mathbf{e}_2} - X^7\mathbf{e}_7 \circ \bar{\mathbf{e}_2} = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_2}
\end{aligned}$$

(c) Se $a = 3$

$$\begin{aligned}
& (2P_3 - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_3}) = 2X^0\bar{\mathbf{e}_3} - X^0\bar{\mathbf{e}_3} - X^1\mathbf{e}_1 \circ \bar{\mathbf{e}_3} - X^2\mathbf{e}_2 \circ \bar{\mathbf{e}_3} - X^3\mathbf{e}_3 \circ \bar{\mathbf{e}_3} - X^4\mathbf{e}_4 \circ \bar{\mathbf{e}_3} \\
& -X^5\mathbf{e}_5 \circ \bar{\mathbf{e}_3} - X^6\mathbf{e}_6 \circ \bar{\mathbf{e}_3} - X^7\mathbf{e}_7 \circ \bar{\mathbf{e}_3} = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_3}
\end{aligned}$$

(d) Se $a = 4$

$$\begin{aligned}
& (2P_4 - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_4}) = 2X^0\bar{\mathbf{e}_4} - X^0\bar{\mathbf{e}_4} - X^1\mathbf{e}_1 \circ \bar{\mathbf{e}_4} - X^2\mathbf{e}_2 \circ \bar{\mathbf{e}_4} - X^3\mathbf{e}_3 \circ \bar{\mathbf{e}_4} - X^4\mathbf{e}_4 \circ \bar{\mathbf{e}_4} \\
& -X^5\mathbf{e}_5 \circ \bar{\mathbf{e}_4} - X^6\mathbf{e}_6 \circ \bar{\mathbf{e}_4} - X^7\mathbf{e}_7 \circ \bar{\mathbf{e}_4} = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_4}
\end{aligned}$$

(e) Se $a = 5$

$$\begin{aligned}
& (2P_5 - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_5}) = 2X^0\bar{\mathbf{e}_5} - X^0\bar{\mathbf{e}_5} - X^1\mathbf{e}_1 \circ \bar{\mathbf{e}_5} - X^2\mathbf{e}_2 \circ \bar{\mathbf{e}_5} - X^3\mathbf{e}_3 \circ \bar{\mathbf{e}_5} - X^4\mathbf{e}_4 \circ \bar{\mathbf{e}_5} \\
& -X^5\mathbf{e}_5 \circ \bar{\mathbf{e}_5} - X^6\mathbf{e}_6 \circ \bar{\mathbf{e}_5} - X^7\mathbf{e}_7 \circ \bar{\mathbf{e}_5} = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_5}
\end{aligned}$$

(f) Se $a = 6$

$$(2P_6 - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_6}) = 2X^0\bar{\mathbf{e}_6} - X^0\bar{\mathbf{e}_6} - X^1\mathbf{e}_1 \circ \bar{\mathbf{e}_6} - X^2\mathbf{e}_2 \circ \bar{\mathbf{e}_6} - X^3\mathbf{e}_3 \circ \bar{\mathbf{e}_6} - X^4\mathbf{e}_4 \circ \bar{\mathbf{e}_6}$$
$$-X^5\mathbf{e}_5 \circ \bar{\mathbf{e}_6} - X^6\mathbf{e}_6 \circ \bar{\mathbf{e}_6} - X^7\mathbf{e}_7 \circ \bar{\mathbf{e}_6} = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_6}$$

(g) Se $a = 7$

$$(2P_7 - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_7}) = 2X^0\bar{\mathbf{e}_7} - X^0\bar{\mathbf{e}_7} - X^1\mathbf{e}_1 \circ \bar{\mathbf{e}_7} - X^2\mathbf{e}_2 \circ \bar{\mathbf{e}_7} - X^3\mathbf{e}_3 \circ \bar{\mathbf{e}_7} - X^4\mathbf{e}_4 \circ \bar{\mathbf{e}_7}$$
$$-X^5\mathbf{e}_5 \circ \bar{\mathbf{e}_7} - X^6\mathbf{e}_6 \circ \bar{\mathbf{e}_7} - X^7\mathbf{e}_7 \circ \bar{\mathbf{e}_7} = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_7}$$

Portanto,

$$(2P_a - 1) \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_a}) = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_a} \quad \Rightarrow \quad \alpha_a \bullet_\lrcorner (X \circ \bar{\mathbf{e}_a}) = \bar{X} \circ \bar{\mathbf{e}_a}$$

□

Demonstração do Lema 11 D

▶ **Lema 11:**

(a) Dados $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \dots, 6$ *então*

$$\boxed{\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u = \rho\mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \tag{D.1}$$

onde $\rho = (-1)^{|u|(|u|-1)/2}$.

(b) Dados $\mathbf{e}_a \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \dots, 6$ *com* $\mathbf{e}_a \notin \{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}\}$ *ou* $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m\}$ *não sendo uma* $\mathbb{H}$*-tripla para* $\mathbf{e}_l \neq \mathbf{e}_m$ *e* $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m \in \{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_6}\}$, *então*

$$\boxed{\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u = \lambda\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \tag{D.2}$$

com $\lambda = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2}$ *onde* $|u|$ *denota o grau de* u, *se* $u \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$ *então* $|u| = k$.

◀

Demonstração:

(a) 0) Para $u = \mathbf{e}_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u = \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0 \circ (1 \circ \mathbf{e}_0) = \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

1) Para $u = \mathbf{e}_b \in \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u = \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_0 \circ (1 \circ \mathbf{e}_b) = \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

2) Para $u = \mathbf{e}_{bc} \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u = \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bc} = (\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c = \mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) = \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bc}) = -\mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

3) Para $u = \mathbf{e}_{bcd} \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcd} = ((\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d = (\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d \\ &= \mathbf{e}_0 \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) = \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcd}) = -\mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned}$$

4) Para $u = \mathbf{e}_{bcdf} \in \Lambda_4(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf} = (((\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f = ((\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f \\ &= (\mathbf{e}_0 \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f = \mathbf{e}_0 \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) = \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf}) \\ &= \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned}$$

5) Para $u = \mathbf{e}_{bcdfg} \in \Lambda_5(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg} = ((((\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g = (((\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g \\
&= ((\mathbf{e}_0 \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g = (\mathbf{e}_0 \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g \\
&= \mathbf{e}_0 \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) = \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg}) = \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

6) Para $u = \mathbf{e}_{bcdfgh} \in \Lambda_6(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh} = (((((\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= ((((\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = (((\mathbf{e}_0 \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= ((\mathbf{e}_0 \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = (\mathbf{e}_0 \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ \mathbf{e}_h \\
&= \mathbf{e}_0 \circ (((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) = \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh}) = -\mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

7) Para $u = \mathbf{e}_{bcdfghj} \in \Lambda_7(\mathbb{R}^{0,7})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfghj} = ((((((\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \circ \mathbf{e}_j \\
&= (((((\mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \circ \mathbf{e}_j \\
&= ((((\mathbf{e}_0 \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \circ \mathbf{e}_j \\
&= (((\mathbf{e}_0 \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \circ \mathbf{e}_j \\
&= ((\mathbf{e}_0 \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ \mathbf{e}_h) \circ \mathbf{e}_j \\
&= (\mathbf{e}_0 \circ (((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h)) \circ \mathbf{e}_j \\
&= \mathbf{e}_0 \circ ((((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \circ \mathbf{e}_j) \\
&= \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfghj}) = -\mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u = \rho \mathbf{e}_0 \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

onde $\rho = (-1)^{|u|(|u|-1)/2}$ que é o mesmo sinal da reversão.

(b) 0) Quando $u = \mathbf{e}_0 \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$ segue-se que:

$$\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_a \circ (1 \circ \mathbf{e}_0) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

1) Quando $u = \mathbf{e}_b \in \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$ segue que:

(i) $a \neq b$:

$$\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u = \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_a \circ (1 \circ \mathbf{e}_b) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

(ii) $a = b$:

$$\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u = \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_a \circ (1 \circ \mathbf{e}_a) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

2) Quando $u = \mathbf{e}_{bc} \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{0,7})$ segue que:

(i) $a \notin \{b, c\}$, e (abc) não é uma $\mathbb{H}$-tripla:

$$\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u = \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bc} = (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c = -\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bc}) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})$$

(ii) $a \in \{b, c\}$ ou (abc) é uma $\mathbb{H}$-tripla. Sem perda de generalidade considere $a = b$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bc} = \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{ac} = (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c = \mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \\ &= \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{ac}) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned} \tag{D.3}$$

3) Quando $u = \mathbf{e}_{bcd} \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$, segue que:

(i) $a \notin \{b, c, d\}$, e (ijk) não é uma $\mathbb{H}$-tripla onde $i, j, k \in \{a, b, c, d\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcd} = ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d = -(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d \\ &= \mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcd}) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned}$$

(ii) $a \in \{b, c, d\}$ ou (abc) é uma $\mathbb{H}$-tripla. Sem perda de generalidade considere $a = b$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcd} = \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acd} = ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d = (\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d \\ &= -\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acd}) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned}$$

(iii) (ijk) é uma $\mathbb{H}$-tripla onde $i, j, k \in \{a, b, c, d\}$ e $(ijk) \neq (abc)$. Vamos supor que (abd) é uma $\mathbb{H}$-tripla:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcd} = ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d = -(\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d \\ &= \mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) = \mathbf{e}_a (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcd}) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned}$$

4) Quando $u = \mathbf{e}_{bcdf} \in \Lambda_4(\mathbb{R}^{0,7})$, segue que:

(i) $a \notin \{b, c, d, f\}$, e (ijk) não é uma $\mathbb{H}$-tripla onde $i, j, k \in \{a, b, c, d, f\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf} = (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f = -((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f \\ &= (\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f = -\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf}) \\ &= -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned}$$

(ii) $a \in \{b, c, d, f\}$ ou (abc) é uma $\mathbb{H}$-tripla. Sem perda de generalidade considere $a = b$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf} = \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdf} = (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f \\ &= ((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f = -(\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f \\ &= \mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdf}) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned} \tag{D.4}$$

(iii) (ijk) é uma $\mathbb{H}$-tripla onde $i, j, k \in \{a, b, c, d, f\}$ e $(ijk) \neq (abc)$. Vamos supor que (abd) é uma $\mathbb{H}$-tripla:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf} = (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f = -((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f \\ &= (\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f = -\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf}) \\ &= -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned}$$

5) Quando $u = \mathbf{e}_{bcdfg} \in \Lambda_5(\mathbb{R}^{0,7})$, segue que:

(i) $a \notin \{b, c, d, f, g\}$, e (ijk) não é uma $\mathbb{H}$-tripla onde $i, j, k \in \{a, b, c, d, f, g\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg} = ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g \\ &= -(((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g = ((\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g \\ &= -(\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g = \mathbf{e}_a \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\ &= \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg}) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u}) \end{aligned}$$

(ii) $a \in \{b, c, d, f, g\}$ ou (abc) é uma $\mathbb{H}$-tripla. Sem perda de generalidade, considere $a = b$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh} = \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdfgh} = ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g \\
&= (((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g = -((\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g \\
&= (\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g = -\mathbf{e}_a \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
&= -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdfgh}) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

(iii) (ijk) é uma $\mathbb{H}$-tripla onde $i, j, k \in \{a, b, c, d, f, g\}$ e $(ijk) \neq (abc)$. Vamos supor que (abd) é uma $\mathbb{H}$-tripla:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg} = ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g \\
&= -(((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g = ((\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g \\
&= -(\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g = \mathbf{e}_a \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
&= \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg}) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

(iv) (ijk) e (lmn) são $\mathbb{H}$-triplas onde $i, j, k, l, m, n \in \{a, b, c, d, f, g\}$, $\{i, j, k\} \neq \{l, m, n\}$ e $(ijk) \neq (abc)$. Vamos supor que (abd) e (cfg) são $\mathbb{H}$-triplas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg} = ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g \\
&= -(((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g = ((\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g \\
&= -(\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g = \mathbf{e}_a \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
&= \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg}) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

6) Quando $u = \mathbf{e}_{bcdfgh} \in \Lambda_6(\mathbb{R}^{0,7})$, segue que:

(i) $a \notin \{b, c, d, f, g, h\}$, e (ijk) e (lmn) não são $\mathbb{H}$-triplas onde $i, j, k, l, m, n \in \{a, b, c, d, f, g, h\}$ e $\{i, j, k\} \neq \{l, m, n\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh} = (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= -((((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = (((\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= -((\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = (\mathbf{e}_a \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ \mathbf{e}_h \\
&= -\mathbf{e}_a \circ (((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh}) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

(ii) $a \in \{b, c, d, f, g, h\}$ ou (abc) é uma $\mathbb{H}$-tripla. Sem perda de generalidade, considere $a = b$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh} = \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdfgh} = (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= ((((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = -(((\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= ((\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = -(\mathbf{e}_a \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ \mathbf{e}_h \\
&= \mathbf{e}_a \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdfgh}) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

(iii) (ijk) é uma $\mathbb{H}$-tripla onde $i, j, k \in \{a, b, c, d, f, g, h\}$ e $(ijk) \neq (abc)$. Vamos supor que (abd) é uma $\mathbb{H}$-tripla:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh} = (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= -((((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = (((\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= -((\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = (\mathbf{e}_a \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ \mathbf{e}_h \\
&= -\mathbf{e}_a \circ (((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh}) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

(iv) (ijk) e (lmn) são $\mathbb{H}$-triplas onde $i, j, k, l, m, n \in \{a, b, c, d, f, g, h\}$, $\{i, j, k\} \neq \{l, m, n\}$ e $(ijk) \neq (abc)$. Vamos supor que (abd) e (cfg) são $\mathbb{H}$-triplas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u &= \mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh} = (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= ((((\mathbf{e}_a \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c)) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = -(((\mathbf{e}_a \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h \\
&= ((\mathbf{e}_a \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h = -(\mathbf{e}_a \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ \mathbf{e}_h \\
&= \mathbf{e}_a \circ (((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh}) = -\mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})
\end{aligned}$$

Assim, em geral

$$\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u = (-1)^{(|u|^2+|u|+2)/2} \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} u)$$

Na hipótese acima $u \in \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$ não precisa ser homogêneo. Por exemplo, tomando as Eqs.(D.3) e (D.4). Quando $u = \mathbf{e}_b\mathbf{e}_c + \mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$ é definido, o lema mostra nos casos 2(ii) e 4(ii) acima implicam que $\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u = \mathbf{e}_a \circ (1 \bullet_{\llcorner} u)$ e portanto, em vários casos o referida lema vale para elementos que não são homogêneos. Tomando exemplos similares, pode ser provado que existem alguns casos onde $u \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7}) \oplus \Lambda_{k+1}(\mathbb{R}^{0,7})$ satisfaz este lema.

□

Demonstração do Lema 12 E

Apresentamos abaixo a demonstração completa do Lema 12.

▶ **Lema 12:**

(a) Dados $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ *então*

$$\boxed{(\mathbf{e}_0 \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} = \eta \mathbf{e}_0}$$

onde $\eta = (-1)^{|u|(r_{|u|} - r_{|u|-1}) + (8-|u|)(7-|u|)/2}$ *e* r_j *são os números de Radon-Hurwitz definidos pela seguinte tabela*

j	0	1	2	3	4	5	6	7
r_j	0	1	2	2	3	3	3	3

e a relação de recorrência $r_{j+8} = r_j + 4$.

(b) Dados $\mathbf{e}_a \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ *com* $\mathbf{e}_a \notin \{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}\}$ *ou* $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m\}$ *não sendo uma* $\mathbb{H}$*-tripla para* $\mathbf{e}_l \neq \mathbf{e}_m$ *e* $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m \in \{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_6}\}$, *então*

$$\boxed{(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} = \lambda \mathbf{e}_a} \tag{E.1}$$

onde $\lambda = (-1)^{(|u|^2 + |u| + 2)/2}$.

◀

Demonstração:

(a) De agora em diante denotaremos por MI a identidade de Moufang dada pela Eq.(3.70).

0) Para $u \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$(1 \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} = (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_0) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_0})} = \mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_0 = 1$$

1) Para $u \in \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$(1 \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} = (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_a) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_a})} = -\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a = 1$$

2) Para $u \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}(1 \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} &= (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b})} = (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b))} = (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \\ &= -(\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a) \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \overset{MI}{=} \mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_b = -1\end{aligned}$$

3) Para $u \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\tilde{u})} &= (1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\widetilde{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c})} = ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}(-\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c))}\\
&= ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c) = -(\mathbf{e}_c\circ(\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b))\circ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\\
&\overset{MI}{=} -(\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ(\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b) \overset{(2)}{=} 1
\end{aligned}$$

(ii) (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\tilde{u})} &= (1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\widetilde{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c})} = ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}(-\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c))}\\
&= ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c) = (\mathbf{e}_c\circ(\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b))\circ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\\
&\overset{MI}{=} (\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ(\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b) \overset{(2)}{=} -1
\end{aligned}$$

4) Para $u\in\Lambda_4(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
(1\bullet_{\llcorner} u)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\tilde{u})} &= (1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\widetilde{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c}\mathbf{e}_d)}\\
&= (((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d)}\\
&= -(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\\
&= (\mathbf{e}_d\circ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c))\circ(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\\
&\overset{MI}{=} ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c) \overset{(3)(i)}{=} 1
\end{aligned}$$

(ii) (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
(1\bullet_{\llcorner} u)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\tilde{u})} &= (1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\widetilde{\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c}\mathbf{e}_d)}\\
&= (((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d)}\\
&= -(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\\
&= (\mathbf{e}_d\circ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c))\circ(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\\
&\overset{MI}{=} ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c) \overset{(3)(ii)}{=} -1
\end{aligned}$$

5) Para $u\in\Lambda_5(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
(1\bullet_{\llcorner} u)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\tilde{u})} &= (1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\widetilde{\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d}\mathbf{e}_f)}\\
&= ((((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\mathbf{e}_f)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f)}\\
&= -((((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\mathbf{e}_f)\circ((((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\mathbf{e}_f)\\
&= (\mathbf{e}_f\circ(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d))\circ((((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\mathbf{e}_f)\\
&\overset{MI}{=} (((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d) \overset{(4)(i)}{=} -1
\end{aligned}$$

(ii) (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
(1\bullet_{\llcorner} u)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\tilde{u})} &= (1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\widetilde{\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d}\mathbf{e}_f)}\\
&= ((((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\mathbf{e}_f)\circ\overline{(1\bullet_{\llcorner}\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f)}\\
&= -((((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\mathbf{e}_f)\circ((((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\mathbf{e}_f)\\
&= (\mathbf{e}_f\circ(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d))\circ((((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ\mathbf{e}_f)\\
&\overset{MI}{=} (((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d)\circ(((\mathbf{e}_a\circ\mathbf{e}_b)\circ\mathbf{e}_c)\circ\mathbf{e}_d) \overset{(4)(ii)}{=} 1
\end{aligned}$$

6) Para $u \in \Lambda_6(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
& (1 \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
= \;& (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\widetilde{\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d}\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g)} \\
= \;& -(((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g)} \\
= \;& (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
= \;& -(\mathbf{e}_g \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
\overset{MI}{=} \;& -((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \overset{(5)(i)}{=} -1
\end{aligned}$$

(ii) (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
& (1 \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
= \;& (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\widetilde{\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d}\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g)} \\
= \;& -(((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g)} \\
= \;& (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
= \;& -(\mathbf{e}_g \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
\overset{MI}{=} \;& -((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \overset{(5)(ii)}{=} 1
\end{aligned}$$

7) Para $u \in \Lambda_7(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
& (1 \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
= \;& (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\widetilde{\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f}\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h)} \\
= \;& -((((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g)} \\
= \;& (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ ((((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\
= \;& -(\mathbf{e}_h \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ ((((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\
\overset{MI}{=} \;& -(((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \overset{(6)(i)}{=} 1
\end{aligned}$$

(ii) (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
& (1 \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
= \;& (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\widehat{\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f}\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h)} \\
= \;& -((((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g)} \\
= \;& (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ ((((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\
= \;& -(\mathbf{e}_h \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ ((((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\
\overset{MI}{=} \;& -(((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \overset{(6)(ii)}{=} -1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\mathbf{e}_0 \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} = \eta \mathbf{e}_0$$

onde $\eta = (-1)^{|u|(r_{|u|}-r_{|u|-1})+(8-|u|)(7-|u|)/2}$.

(b) 0) Para $u \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_0) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_0})} = (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_0) \circ \overline{(1 \circ \mathbf{e}_0)} = (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_0) \circ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_a$$

1) Para $u \in \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) $a \neq b$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_b) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_b})} = (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \overline{(1 \circ \mathbf{e}_b)} = -(\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_b \\ &= (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_a\end{aligned}$$

(ii) $a = b$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_b) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_b})} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_a) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_a})} = (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \overline{(1 \circ \mathbf{e}_a)} \\ &= -(\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_a\end{aligned}$$

2) Para $u \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) $a \notin \{b, c\}$, e (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bc}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bc}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bc}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_{bc}))} \\ &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bc}) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bc}) = ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \\ &= -(\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b)) \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \overset{MI}{=} -(\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_b \overset{(1)(i)}{=} \mathbf{e}_a\end{aligned}$$

(ii) $a = b$, ou $a = c$, ou (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$. Sem perda de generalidade, considere $a = b$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bc}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bc}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{ac}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{ac}})} \\ &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{ac}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_{ac}))} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{ac}) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{ac}) \\ &= ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) = -(\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a)) \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \\ &\overset{MI}{=} -(\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_a \overset{(1)(ii)}{=} \mathbf{e}_a\end{aligned}$$

3) Para $u \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) $a \notin \{b, c\}$, e (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bcd}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bcd}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bcd}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_{bcd}))} \\ &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bcd}) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bcd}) = (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \\ &= -(\mathbf{e}_d \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c)) \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \\ &\overset{MI}{=} -((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \overset{(2)(i)}{=} -\mathbf{e}_a\end{aligned}$$

(ii) $a = b$ ou $a = c$ ou (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$. Sem perda de generalidade, considere $a = b$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bcd}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bcd}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{acd}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{acd}})} \\ &= (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{acd}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_{acd}))} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{acd}) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{acd}) \\ &= (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \\ &= -(\mathbf{e}_d((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c)) \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \\ &\overset{MI}{=} -((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \overset{(2)(ii)}{=} -\mathbf{e}_a\end{aligned}$$

4) Para $u \in \Lambda_4(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) $a \notin \{b, c\}$, e (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf}) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \widetilde{\mathbf{e}_{bcdf}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf}) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf})} \\
&= -(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf}) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf}) \\
&= -((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \\
&= (\mathbf{e}_f \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \\
&\overset{MI}{=} (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \overset{(3)(i)}{=} -\mathbf{e}_a
\end{aligned}$$

(ii) $a = b$ ou $a = c$ ou (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$. Sem perda de generalidade, considere $a = b$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdf}) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \widetilde{\mathbf{e}_{bcdf}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdf}) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \widetilde{\mathbf{e}_{acdf}})} \\
&= -(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdf}) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdf}) \\
&= -((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \\
&= (\mathbf{e}_f \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d)) \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \\
&\overset{MI}{=} (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \overset{(3)(ii)}{=} -\mathbf{e}_a
\end{aligned}$$

5) Para $u \in \Lambda_5(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) $a \notin \{b, c\}$, e (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg}) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \widetilde{\mathbf{e}_{bcdfg}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg}) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg})} \\
&= -(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg}) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg}) \\
&= -(((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
&= (\mathbf{e}_g \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
&\overset{MI}{=} ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \overset{(4)(i)}{=} \mathbf{e}_a
\end{aligned}$$

(ii) $a = b$ ou $a = c$ ou (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$. Sem perda de generalidade, considere $a = b$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} &= (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfg}) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \widetilde{\mathbf{e}_{bcdfg}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdfg}) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \widetilde{\mathbf{e}_{acdfg}})} \\
&= -(\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdfg}) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{acdfg}) \\
&= -(((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
&= (\mathbf{e}_g \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f)) \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
&\overset{MI}{=} ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \overset{(4)(ii)}{=} \mathbf{e}_a
\end{aligned}$$

6) Para $u \in \Lambda_6(\mathbb{R}^{0,7})$:

(i) $a \notin \{b, c\}$, e (abc) não é uma tripla-$\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} u) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \tilde{u})} \\
= \; & (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh}) \circ \overline{(1 \bullet_{\llcorner} \widetilde{\mathbf{e}_{bcdfgh}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh}) \circ (1 \bullet_{\llcorner} \mathbf{e}_{bcdfgh}) \\
= \; & ((((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \circ (((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\
= \; & -(\mathbf{e}_h \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ (((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\
\overset{MI}{=} \; & ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \overset{(5)(i)}{=} \mathbf{e}_a
\end{aligned}$$

(ii) $a = b$ ou $a = c$ ou (abc) é uma tripla-$\mathbb{H}$. Sem perda de generalidade, considere $a = b$:

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} \\
= \; & (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bcdfgh}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bcdfgh}})} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{acdfgh}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{acdfgh}})} \\
= \; & (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{acdfgh}) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_{acdfgh}))} = (\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{acdfgh}) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{acdfgh}) \\
= \; & ((((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\
= \; & -(\mathbf{e}_h \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g)) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\
\overset{MI}{=} \; & -(((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \overset{(5)(ii)}{=} \mathbf{e}_a
\end{aligned}$$

Assim, em geral

$$(\mathbf{e}_a \bullet_\llcorner u) \circ \overline{(1 \bullet_\llcorner \tilde{u})} = \lambda \mathbf{e}_a$$

onde $\lambda = (-1)^{(|u|^2 + |u| + 2)/2}$.

□

Demonstração do Lema 13 F

Por fim, demonstramos o Lema 13 em detalhes.

▶ **Lema 13:**

(a) Dados $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ *então*

$$\boxed{(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = \eta \mathbf{e}_0}$$

onde $\eta = (-1)^{|u|(r_{|u|} - r_{|u|-1}) + (8-|u|)(7-|u|)/2}$.

(b) Dados $\mathbf{e}_a \in \mathbb{O}$ *e* $u = \mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_k} \in \Lambda_k(\mathbb{R}^{0,7})$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ *então*

$$\boxed{(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = \beta \mathbf{e}_a} \tag{F.1}$$

onde $\beta = (-1)^{|u|(|u|+1)/2}$.

◀

Demonstração:

(a) 0) Para $u \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$(\bar{u} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = (\bar{\mathbf{e}_0} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_0}) = \mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_0 = 1$$

1) Para $u \in \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$(\bar{u} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = (\bar{\mathbf{e}_a} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_a}) = (-\mathbf{e}_a \circ 1) \circ (1 \circ \mathbf{e}_a) = -\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a = 1$$

2) Para $u \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}(\bar{u} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) &= (\overline{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b}) = (\mathbf{e}_b\mathbf{e}_a \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b)) \\ &= -(\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a) \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \overset{MI}{=} \mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_b = -1\end{aligned}$$

3) Para $u \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}(\bar{u} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) &= (\overline{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c}) = (-\mathbf{e}_c\mathbf{e}_b\mathbf{e}_a \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c)) \\ &= (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)) \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \overset{MI}{=} (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a) \circ (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \overset{(2)}{=} 1\end{aligned}$$

4) Para $u \in \Lambda_4(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}(\bar{u} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) &= (\overline{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d}) = (\mathbf{e}_d\mathbf{e}_c\mathbf{e}_b\mathbf{e}_a \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d) \\ &= (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a))) \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \\ &\overset{MI}{=} (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)) \circ ((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \overset{(3)}{=} 1\end{aligned}$$

5) Para $u \in \Lambda_5(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}(\bar{u} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) &= (\overline{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_a\widetilde{\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d}\mathbf{e}_f) \\ &= (-\mathbf{e}_f\mathbf{e}_d\mathbf{e}_c\mathbf{e}_b\mathbf{e}_a \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f) \\ &= -(\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)))) \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \\ &\overset{MI}{=} -(\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a))) \circ (((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \overset{(4)}{=} -1\end{aligned}$$

6) Para $u \in \Lambda_6(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}(\bar{u} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) &= (\overline{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\widetilde{\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d}\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g) \\ &= (\mathbf{e}_g\mathbf{e}_f\mathbf{e}_d\mathbf{e}_c\mathbf{e}_b\mathbf{e}_a \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g)) \\ &= -(\mathbf{e}_g \circ (\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a))))) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\ &\overset{MI}{=} -(\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)))) \circ ((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \overset{(5)}{=} -1\end{aligned}$$

7) Para $u \in \Lambda_7(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}&(\bar{u} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) \\ =\ &(\overline{\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h} \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\widetilde{\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f}\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h) \\ =\ &(-\mathbf{e}_h\mathbf{e}_g\mathbf{e}_f\mathbf{e}_d\mathbf{e}_c\mathbf{e}_b\mathbf{e}_a \bullet_\lrcorner 1) \circ (1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c\mathbf{e}_d\mathbf{e}_f\mathbf{e}_g\mathbf{e}_h)) \\ =\ &(\mathbf{e}_h \circ (\mathbf{e}_g \circ (\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)))))) \circ ((((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\ \overset{MI}{=}\ &(\mathbf{e}_g \circ (\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a))))) \circ (((((\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b) \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \overset{(6)}{=} 1\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_0) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = \eta\mathbf{e}_0$$

onde $\eta = (-1)^{|u|(r_{|u|}-r_{|u|-1})+(8-|u|)(7-|u|)/2}$.

(b) $(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u})$ é calculado explicitamente para todos multivetores homogêneos que não possuem fatores em comum com $\mathbf{e}_a$.

0) Para $u \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = (\bar{\mathbf{e}_0} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_0}) = (\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_a) \circ (1 \circ \mathbf{e}_0) = (\mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_a$$

1) Para $u \in \Lambda_1(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = (\bar{\mathbf{e}_b} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{\mathbf{e}_b}) = (-\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a) \circ (1 \circ \mathbf{e}_b) = -(\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_b = -\mathbf{e}_a$$

2) Para $u \in \Lambda_2(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) &= (\overline{\mathbf{e}_{bc}} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bc}}) = (\mathbf{e}_{cb} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_{bc})) \\ &= -(\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)) \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \overset{MI}{=} -(\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a) \circ \mathbf{e}_b = -\mathbf{e}_a\end{aligned}$$

3) Para $u \in \Lambda_3(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) &= (\overline{\mathbf{e}_{bcd}} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bcd}}) = (-\mathbf{e}_{dcb} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_{bcd})) \\ &= (\mathbf{e}_{dcb} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bcd}) = (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a))) \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \\ &\overset{MI}{=} (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)) \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \overset{(2)}{=} \mathbf{e}_a\end{aligned}$$

4) Para $u \in \Lambda_4(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}
(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) &= (\overline{\mathbf{e}_{bcdf}} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bcdf}}) = (\mathbf{e}_{fdcb} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bcdf}) \\
&= (\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)))) \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \\
&\overset{MI}{=} (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a))) \circ ((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \overset{(3)}{=} \mathbf{e}_a
\end{aligned}$$

5) Para $u \in \Lambda_5(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}
(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) &= (\overline{\mathbf{e}_{bcdfg}} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bcdfg}}) = (-\mathbf{e}_{gfdcb} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \mathbf{e}_{bcdfg}) \\
&= -(\mathbf{e}_g \circ (\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a))))) \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \\
&\overset{MI}{=} -(\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)))) \circ (((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) = -\mathbf{e}_a
\end{aligned}$$

6) Para $u \in \Lambda_6(\mathbb{R}^{0,7})$:

$$\begin{aligned}
& (\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) \\
= \; & (\overline{\mathbf{e}_{bcdfgh}} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \widetilde{\mathbf{e}_{bcdfgh}}) = (\mathbf{e}_{hgfdcb} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner (-\mathbf{e}_{bcdfgh})) \\
= \; & -(\mathbf{e}_h \circ (\mathbf{e}_g \circ (\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a)))))) \circ (((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \circ \mathbf{e}_h) \\
\overset{MI}{=} \; & -(\mathbf{e}_g \circ (\mathbf{e}_f \circ (\mathbf{e}_d \circ (\mathbf{e}_c \circ (\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_a))))) \circ ((((\mathbf{e}_b \circ \mathbf{e}_c) \circ \mathbf{e}_d) \circ \mathbf{e}_f) \circ \mathbf{e}_g) \overset{(5)}{=} -\mathbf{e}_a
\end{aligned}$$

Todos os casos acima podem ser expressos como

$$(\bar{u} \bullet_\lrcorner \mathbf{e}_a) \circ (1 \bullet_\llcorner \tilde{u}) = \beta \mathbf{e}_a$$

onde $\beta = (-1)^{|u|(|u|+1)/2}$.

□

Glossário

G

$\otimes$	produto tensorial
$\wedge$	produto exterior
$\rfloor$	contração (ou produto interior) à esquerda
$\lfloor$	contração (ou produto interior) à direita
$\diamond$	produto de Clifford (constantemente denotado apenas por justaposição)
$\hat{\otimes}$	produto tensorial graduado
$\circ$	produto octonionico padrão
$\circ_X$	produto-X para X octonion
$\circ_{X,Y}$	produto-XY para X, Y octonions
$\circ_{1,X}$	produto-$(1, X)$ para X octonion
$\bullet_{\llcorner}$	realiza o produto da esquerda para a direita entre um octonion e um multivetor homogêneo de Clifford
$\bullet_{\lrcorner}$	realiza o produto da direita para a esquerda entre um octonion e um multivetor homogêneo de Clifford
$\dot{\bullet}_{\llcorner}$	é a extensão linear do produto-$\bullet_{\llcorner}$ para toda álgebra exterior
$\dot{\bullet}_{\lrcorner}$	é a extensão linear do produto-$\bullet_{\lrcorner}$ para toda álgebra exterior
$\bullet$	denota qualquer um dos produtos $\dot{\bullet}_{\llcorner}, \dot{\bullet}_{\lrcorner}, \bullet_{\llcorner}$ ou $\bullet_{\lrcorner}$
$\circ_u$	generalização do produto-X para $u \in \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$
$\circ_{1,u}$	generalização do produto-$(1, X)$ para $u \in \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$
$\circ_{u,v}$	generalização do produto-(X, Y) para $u, v \in \Lambda(\mathbb{R}^{0,7})$
$\odot_{\llcorner}$	produto não-associativo entre elementos da álgebra de Clifford, realiza o produto-$\bullet_{\llcorner}$ da direita para a esquerda entre u e v para $u, v \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$
$\odot_{\lrcorner}$	realiza o produto-$\bullet_{\lrcorner}$ da esquerda para a direita entre u e v para $u, v \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$
$\odot$	denota $\odot_{\lrcorner}$ ou $\odot_{\llcorner}$ dependendo da situação
$\blacktriangledown_{1,u}$	generalização do produto-$(1, X)$ não análoga ao produto-$(1, u)$ para $u \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$
$\circ_{1,u}^{\llcorner}$	generalização do produto-$\circ_{1,u}$ para um octonion à esquerda e um multivetor de Clifford à direita com respeito ao produto-$\odot_{\llcorner}$
$\circ_{1,u}^{\lrcorner}$	generalização do produto-$\circ_{1,u}$ para um octonion à esquerda e um multivetor de Clifford à direita com respeito ao produto-$\odot_{\lrcorner}$
$\circ_{1,u}^{\lrcorner\llcorner}$	generalização do produto $\circ_{1,u}$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\lrcorner}$ e $\odot_{\llcorner}$
$\circ_{1,u}^{\lrcorner\lrcorner}$	generalização do produto $\circ_{1,u}$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\lrcorner}$ e $\odot_{\lrcorner}$
$\blacktriangledown_{1,u}^{\llcorner}$	generalização do produto $\blacktriangledown_{1,u}$ para multivetores de Clifford com respeito ao produto $\odot_{\llcorner}$
$\blacktriangledown_{1,u}^{\lrcorner}$	generalização do produto $\blacktriangledown_{1,u}$ para multivetores de Clifford com respeito ao produto $\odot_{\lrcorner}$
$\circ_u^{\llcorner\bullet}$	generalização do produto $\circ_u$ para um multivetor de Clifford e um octonion com respeito aos produtos $\odot_{\llcorner}$ e $\bullet$
$\circ_u^{\lrcorner\bullet}$	generalização do produto $\circ_u$ para um multivetor de Clifford e um octonion com respeito aos produtos $\odot_{\lrcorner}$ e $\bullet$
$\circ_u^{\bullet\llcorner}$	generalização do produto $\circ_u$ para um octonion e um multivetor de Clifford com respeito aos produtos $\bullet$ e $\odot_{\llcorner}$
$\circ_u^{\bullet\lrcorner}$	generalização do produto $\circ_u$ para um octonion e um multivetor de Clifford com respeito aos produtos $\bullet$ e $\odot_{\lrcorner}$
$\circ_u^{\llcorner\llcorner}$	generalização do produto $\circ_u$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\llcorner}$ e $\odot_{\llcorner}$
$\circ_u^{\llcorner\lrcorner}$	generalização do produto $\circ_u$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\llcorner}$ e $\odot_{\lrcorner}$
$\circ_u^{\lrcorner\llcorner}$	generalização do produto $\circ_u$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\lrcorner}$ e $\odot_{\llcorner}$
$\circ_u^{\lrcorner\lrcorner}$	generalização do produto $\circ_u$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\lrcorner}$ e $\odot_{\lrcorner}$

$\circ_{u,v}^{\llcorner\bullet}$ generalização do produto $\circ_{u,v}$ para um multivetor de Clifford e um octonion com respeito aos produtos $\odot_{\llcorner}$ e $\bullet$

$\circ_{u,v}^{\lrcorner\bullet}$ generalização do produto $\circ_{u,v}$ para um multivetor de Clifford e um octonion com respeito aos produtos $\odot_{\lrcorner}$ e $\bullet$

$\circ_{u,v}^{\bullet\llcorner}$ generalização do produto $\circ_{u,v}$ para um octonion e um multivetor de Clifford com respeito aos produtos $\bullet$ e $\odot_{\llcorner}$

$\circ_{u,v}^{\bullet\lrcorner}$ generalização do produto $\circ_{u,v}$ para um octonion e um multivetor de Clifford com respeito aos produtos $\bullet$ e $\odot_{\lrcorner}$

$\circ_{u,v}^{\llcorner\llcorner}$ generalização do produto $\circ_{u,v}$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\llcorner}$ e $\odot_{\llcorner}$

$\circ_{u,v}^{\llcorner\lrcorner}$ generalização do produto $\circ_{u,v}$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\llcorner}$ e $\odot_{\lrcorner}$

$\circ_{u,v}^{\lrcorner\llcorner}$ generalização do produto $\circ_{u,v}$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\lrcorner}$ e $\odot_{\llcorner}$

$\circ_{u,v}^{\lrcorner\lrcorner}$ generalização do produto $\circ_{u,v}$ para multivetores de Clifford com respeito aos produtos $\odot_{\lrcorner}$ e $\odot_{\lrcorner}$